

Fuerzas de Casimir

por
Carlos Villarreal

Este es un capítulo separado que integra el libro

Fronteras de la Física en el Siglo XXI

Octavio Miramontes y Karen Volke (Editores)

CopIt-arXives, 2013

México, D.F.

ISBN: 978-1-938128-03-5

©CopIt-arXives

<http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/copit/TS0011ES/TS0011ES.html>

Índice general

Carlos Villarreal	Fuerzas de Casimir	1
1.	Origen de las fuerzas de Casimir	2
2.	Fuerza de Casimir entre placas conductoras ideales	4
3.	Fuerzas de Casimir en cavidades conductoras.	6
4.	Pistón de Casimir	9
5.	Fuerzas de Casimir en materiales dispersivos.	10
6.	Fuerzas de Casimir electrónicas y acústicas.	13
7.	Efecto Casimir en sistemas no inerciales.	14
8.	Perspectivas.	16
9.	Algunas lecturas recomendadas	16
10.	Referencias	16

Fuerzas de Casimir

Carlos Villarreal, Instituto de Física, UNAM, México

Según las ideas actuales, el vacío físico en su acepción de carencia de todo, no existe. Al contrario, sabemos que cualquier región del Universo, aún en ausencia de materia (átomos, moléculas, electrones, neutrinos, etc.), de luz, o cualquier otra forma de energía radiante, se encuentra permeada por las fluctuaciones de campos cuánticos, con amplitudes y fases que varían al azar. A esta nueva concepción de vacío la denominamos vacío cuántico. Si bien este concepto parece rebuscado y alejado de nuestra realidad cotidiana, el vacío cuántico proporciona una clave para acceder a una comprensión plena de las fuerzas de la Naturaleza. Este se manifiesta en fenómenos tales como las fuerzas intermoleculares de Van der Waals que dan origen a los estados de agregación de la materia (sólido, líquido, gaseoso), al fenómeno de emisión atómica espontánea (como en la luz solar), a la anchura fundamental de los niveles atómicos y, posiblemente, a la energía oscura del Universo.

El origen formal del vacío cuántico podemos encontrarlo en el hecho de que cualquier modo de un campo cuántico oscilatorio tiene un espectro de energía correspondiente a un oscilador armónico, $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, de manera que aún en el estado de cero cuantos, con $n = 0$, el modo tiene una energía finita $E_0 = \hbar\omega/2$. Por otro lado, el número de modos de cualquier campo oscilatorio (óptico, acústico, electrónico, etc.) por unidad de frecuencia y unidad de volumen en un sistema isotrópico y homogéneo tiene la forma $n(\omega) = \omega^2/2\pi^2c^3$ y por tanto la densidad espectral de energía está determinado por el producto de $n(\omega)E_0$:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}, \quad (1)$$

en donde \hbar es la constante de Planck (dividida por 2π) y c es la velocidad de la luz. Puede demostrarse que esta expresión es invariante relativista, de modo que las fluctuaciones de vacío no dan lugar a sistemas de referencia privilegiados y son entonces indetectables por observadores en un estado de movimiento inercial. Sin embargo, un observador en un sistema de referencia privilegiado (no inercial) puede detectar efectos asociados a las fluctuaciones cuánticas. En otras palabras, si la invariancia de Lorentz de un sistema se

rompe por la presencia de fronteras materiales, campos externos, o movimientos acelerados, por ejemplo, entonces la densidad espectral de energía ya no corresponderá a la del sistema isotrópico y homogéneo, dado por (1).

La alteración en la densidad espectral (1) se materializa en los fenómenos mencionados en el párrafo anterior y muchos más. El concepto de energía de punto cero del estado fundamental de un sistema electromagnético puede extenderse a una variedad de sistemas físicos de distinta índole. El comportamiento de sistemas colectivos constituídos por una gran cantidad de partículas cargadas en interacción mutua y con campos externos puede entenderse en términos de las oscilaciones de diferentes modos normales que permiten el transporte de energía, momento lineal y momento angular a través del sistema. A nivel cuántico, dichas oscilaciones pueden ser descritas mediante conjuntos de osciladores armónicos cuyos niveles energéticos de estados excitados pueden asociarse a cuasipartículas cuánticas tales como los fonones (modos vibratorios en una estructura cristalina), plasmones (excitaciones coherentes de un plasma electrónico), excitones (excitaciones de un electrón y un agujero de carga), magnones (excitaciones coherentes de espín), etc. El modo fundamental de cada uno de estos sistemas, asociado a cero cuantos, determina el estado de vacío cuántico correspondiente. En la actualidad, se han podido medir, por ejemplo, las fuerzas tipo Casimir inducidas por el campo de punto cero de fonones en sistemas acústicos. Asimismo, se han calculado las fuerzas tipo Casimir asociadas a fluctuaciones cuánticas de electrones de un material, aunque no se han desarrollado experimentos para verificar estas predicciones.

1. Origen de las fuerzas de Casimir

Una de las manifestaciones físicas más simples del vacío cuántico, que ha permitido estudiar su estructura con mayor profundidad, es la de las fuerzas de Casimir [1]. En 1947, los físicos H. B. G. Casimir y D. Polder trabajaban en los laboratorios Philips en Holanda investigando las fuerzas de atracción de Van der Waals que existen entre las partículas suspendidas en un coloide. Encontraron que, para las separaciones entre las partículas (r) relativamente grandes, el potencial de interacción entre ellas decaía como $V(r) \sim -1/r^7$, lo que difería del resultado proveniente de la teoría cuántica para las interacciones intermoleculares (comúnmente denominadas fuerzas dispersivas) $V(r) \sim -1/r^6$. Casimir y Polder elaboraron una teoría para las interacciones intermoleculares en la que incluyeron el efecto del retardo asociado al tiempo de propagación de la interacción entre las dos moléculas. Como resultado obtuvieron que para dos moléculas con polarizabilidad eléctrica α_1 y α_2

$$V(r) = \frac{-23\alpha_1\alpha_2\hbar c}{4\pi r^7}. \quad (2)$$

La simplicidad de la expresión llamó la atención de Casimir, quien se lo comentó a Niels Bohr durante una caminata. Según narra Casimir, Bohr masculó algo sobre que el

fenómeno debería estar asociado a las fluctuaciones del vacío. Eso fue todo, y a raíz de esta conversación Casimir decidió estudiar los efectos producidos por las fluctuaciones del campo electromagnético de vacío confinado por dos placas paralelas perfectamente conductoras y separadas por una distancia d . Su investigación lo condujo a la conclusión de que debería aparecer una fuerza atractiva entre las placas con una magnitud

$$\frac{F}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4}, \quad (3)$$

en donde A es el área de las placas.

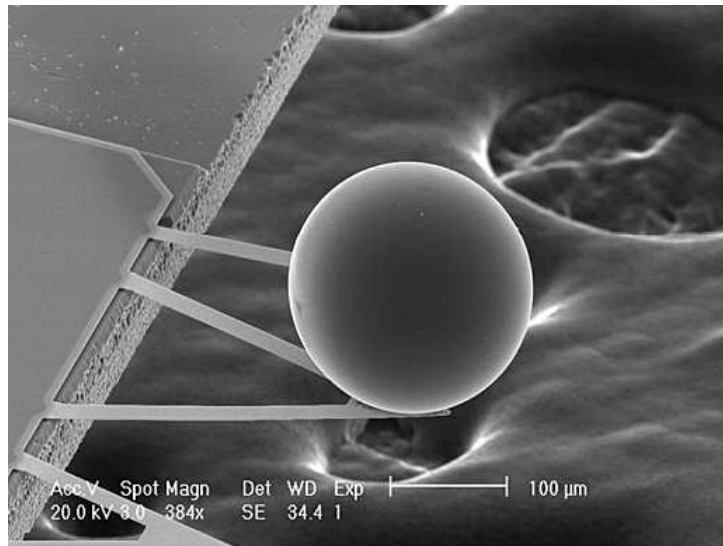


Figura 1: Empleo de técnicas de microscopía de fuerza atómica para la medición de las fuerzas de Casimir entre una esfera micrométrica y una placa conductora. Adaptado de [2].

Esta fuerza es muy pequeña a escalas macroscópicas y sólo es relevante a escalas del orden o menores que micras (10^{-6}m). Como consecuencia, sólo fue hasta años recientes en que los estudios experimentales de las fuerzas de Casimir alcanzaron la precisión necesaria para verificar con detalle las predicciones teóricas. Cabe mencionar que las primeras mediciones efectuadas por Derjaguin en 1951, si bien eran consistentes con la teoría, involucraban errores relativos cercanos al 100%. Fue en 1997 cuando Lamoreux, mediante el empleo de un sistema micromecánico basado en una balanza de torsión, logró verificar la teoría de Casimir con una precisión del 5%. Posteriormente, Mohideen logró una precisión del 1% utilizando técnicas de microscopía de fuerza atómica. Una imagen del dispositivo empleado se muestra en la Figura 1. Otros experimentos fueron desarrollados por

Chan y sus colaboradores empleando sistemas micromecánicos. Todo esto ha impulsado fuertemente las investigaciones experimentales de las fuerzas de Casimir, en las cuales las propiedades detalladas de las placas tales como su capacidad de absorción y disipación de energía, rugosidad, temperatura, etc., han sido tomadas en cuenta.

A continuación presentaremos una derivación simple de las fuerzas de Casimir entre placas paralelas perfectamente conductoras. Después describiremos sistemas más generales, tomando en cuenta otras geometrías o la contribución de fluctuaciones térmicas. Posteriormente abordaremos el problema del pistón cuántico. También discutiremos un formalismo que permite considerar propiedades dispersivas arbitrarias de los medios que confinan a las fluctuaciones del vacío. Después presentaremos brevemente los análogos de fuerzas de Casimir en sistemas electrónicos y acústicos. Finalmente, haremos un bosquejo de los efectos tipo Casimir que surgen del campo de vacío en sistemas no inerciales o gravitacionales, como en el caso de la radiación de hoyos negros de Hawking.

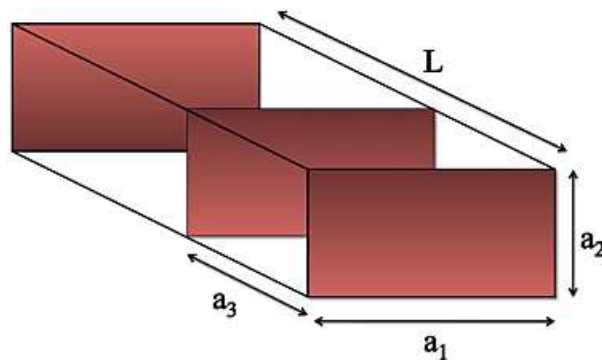


Figura 2: Cavidad rectangular con paredes perfectamente conductoras. La configuración de placas paralelas se recupera si $a_1 = a_2 \equiv a \gg d \equiv a_3$

2. Fuerza de Casimir entre placas conductoras ideales

A continuación, desarrollaremos una teoría muy simple [3], cercana a la propuesta por Casimir, para determinar el efecto del confinamiento en las fluctuaciones cuánticas. Consideremos dos placas paralelas perfectamente conductoras sujetas a la acción del campo electromagnético del vacío. Por conveniencia en los cálculos, supondremos que las placas están en una cavidad de sección cuadrada a^2 y longitud L , y que una de las placas coincide con una de las paredes del fondo de la caja, mientras que la otra placa está a una distancia $a_3 = d$ de ésta, tal y como se muestra en la figura 2. La energía total dentro de la cavidad es $E = E_1 + E_2$ y depende de la posición de la placa intermedia, dado que un cambio en ésta altera los modos del campo electromagnético permitidos dentro de las cavidades.

Si ahora movemos la placa intermedia a una nueva posición $d' = \alpha L$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, y su distancia a la pared del fondo será $(1 - \alpha)L$, dando lugar a una nueva distribución de modos del vacío con una energía $E_3 + E_4$. En consecuencia, la diferencia de energía entre las dos configuraciones es una función de la distancia d :

$$\Delta E = E_1(d) + E_2(L - d) - E_3(\alpha L) - E_4(L(1 - \alpha)), \quad (4)$$

en donde los términos de la suma están dados por

$$E_i(x) = (2) \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{2} \hbar c k_{\mathbf{n}}(x), \quad (5)$$

con $k_{\mathbf{n}}(x) = \omega_{\mathbf{n}}(x)/c$ y donde las condiciones a la frontera implican

$$k_{\mathbf{n}}(x) = \sqrt{\left(\frac{n_1\pi}{x}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_3\pi}{L}\right)^2}. \quad (6)$$

El término (2) antes de la sumatoria proviene de que existen dos polarizaciones independientes del campo electromagnético. Notamos que cada una de las contribuciones es infinita, por lo que es conveniente introducir un término de corte para frecuencias altas de la forma $\exp(-\eta k_{\mathbf{n}}/\pi)$ en cada suma y tomar posteriormente el límite $\eta \rightarrow \infty$. Este corte refleja el hecho de que cualquier material conductor se vuelve transparente a frecuencias suficientemente altas. Consideraremos ahora que la sección transversal de la caja es muy grande, de modo que $a \gg d$; en ese caso, las sumatorias sobre n_2 y n_3 pueden reemplazarse por integrales, lo que nos conduce al resultado:

$$E = -\frac{\pi^2 \hbar c a^2}{720} \left(\frac{1}{d^3} + \frac{1}{(L-d)^3} - \frac{1}{(\alpha L)^3} - \frac{1}{(1-\alpha)^3 L^3} \right). \quad (7)$$

Finalmente, si tomamos el límite $L \rightarrow \infty$ concluimos que la energía está dada por

$$E = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3}, \quad (8)$$

donde $A = a^2$ es el área de las placas. El signo negativo implica que la energía disminuye al acercar las placas, lo que se traduce en una atracción entre éstas. Este fenómeno es el efecto Casimir. La derivación anterior implica que la energía es negativa comparada con la energía asociada a la configuración cuando las placas están alejadas una distancia infinita; en este contexto, no tiene sentido hablar de una energía negativa *per se*. De la ecuación (11) podemos calcular la fuerza entre las placas mediante la relación $F = -\partial E/\partial d$, de modo que la fuerza por unidad de área resulta

$$P = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \quad (9)$$

Si introducimos la energía por unidad de volumen $\mathcal{E} = E/V$, vemos que $P = 3\mathcal{E} < 0$, resultado que discutiremos más adelante.

Al sustituir en las expresiones para la energía y la presión los valores de las constantes fundamentales, resulta que la presión de Casimir es extremadamente pequeña para distancias mayores que una micra (10^{-6} metros), de manera que sólo es apreciable a distancias de unos cientos de nanómetros ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). A estas distancias la presión es alrededor de una atmósfera. Los experimentos actuales muestran que las predicciones de Casimir fueron esencialmente correctas. Por supuesto, es necesario tomar en cuenta una serie de correcciones que no fueron tomadas en cuenta en el modelo original idealizado.

3. Fuerzas de Casimir en cavidades conductoras.

Las ideas de Casimir pueden generalizarse para considerar geometrías más complicadas, como las asociadas a cavidades rectangulares, cilíndricas o esféricas. Un resultado sorprendente es que las fuerzas de Casimir pueden perder su carácter atractivo y tornarse repulsivas en determinadas configuraciones. La existencia de fuerzas de Casimir repulsivas derivadas de la geometría es controversial y a la fecha existen debates sobre su realidad física.

Consideremos una cavidad rectangular con paredes perfectamente conductoras como aquella que aparece en el lado derecho de la figura 2. En este problema es conveniente introducir el formalismo denominado de suma sobre los modos permitidos del campo de vacío. Este método toma en cuenta que la presencia de paredes conductoras da lugar a una redistribución de los modos del campo, los cuales en ausencia de las mismas tienen una distribución $\rho(\omega) \propto \omega^3$. Para esta configuración, la densidad de estados del campo de vacío determinada por las condiciones de contorno electromagnéticas, tiene la siguiente estructura:

$$\rho(\omega) = \frac{(2)}{8} \sum'_{n_i} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{n}}) (1 - \delta_{n_1 0} \delta_{n_2 0} - \delta_{n_2 0} \delta_{n_3 0} - \delta_{n_3 0} \delta_{n_1 0}), \quad (10)$$

en donde la prima en las sumatoria indica que el término con los tres índices $n_i = 0$ debe excluirse. De nuevo, el factor (2) está asociado a los dos grados de polarización independientes del campo electromagnético. Esta forma particular de $\rho(\omega)$ refleja el hecho de que cada modo aparece con igual peso, y que los modos permitidos son aquellos en que la componente paralela (normal) del campo eléctrico (magnético) es nula sobre las paredes de la cavidad. La densidad de energía de Casimir puede derivarse entonces de la expresión

$$\mathcal{E} = \int d\omega \rho(\omega) \hbar\omega/2 \quad (11)$$

lo que (después de una gran cantidad de cálculos) conduce al resultado

$$\mathcal{E} = -\frac{\hbar c}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{u_{n_1, n_2, n_3}^4} + \frac{\hbar c}{4\pi V} \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{n_i} \frac{1}{[(2a_i n_i)^2]}, \quad (12)$$

en donde $u_{n_1, n_2, n_3}^2 \equiv (2a_1 n_1)^2 + (2a_2 n_2)^2 + (2a_3 n_3)^2$. Asimismo, la presión del vacío que actúa sobre una de las paredes con en la dirección normal a_i está dada por:

$$P_i(\sigma) = -\frac{\hbar c}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{4(2a_i)^2 - u_{n_1, n_2, n_3}^2}{[u_{n_1, n_2, n_3}^2]^3} + \frac{\hbar c}{4\pi V} \sum_n \frac{a_i}{[(2a_i n)^2]}. \quad (13)$$

Notamos que tanto la expresión para la densidad de energía, como la asociada a las presiones, involucra términos con signos diferentes, de modo que alterando las longitudes relativas de las aristas que definen a la cavidad pudieran construirse configuraciones en que las presión de Casimir que se ejerce sobre algunos de los pares de placas se vuelva positiva, es decir, dé lugar a fuerzas de Casimir repulsivas.

La dependencia de la densidad de energía y presiones de Casimir con las dimensiones relativas del sistema es consistente con la conservación del tensor de energía-momento del campo electromagnético. El teorema muestra que la densidad de energía está relacionada con la presión ejercida por el campo en las direcciones x, y, z mediante la expresión

$$\mathcal{E} = P_x + P_y + P_z. \quad (14)$$

Para un sistema isotrópico, en que ninguna dirección es preferente $P_x = P_y = P_z \equiv P$, obtenemos $P = (1/3)\mathcal{E} > 0$, que es un resultado conocido en la teoría electromagnética y se cumple, por ejemplo, para la radiación de cuerpo negro en una cavidad macroscópica. Por otro lado, en nuestro problema existen direcciones preferenciales que, en el caso usual de las placas paralelas, es la perpendicular a dichas placas, digamos la dirección z . Esto puede apreciarse en la figura 3, donde se grafican la densidad de energía y las presiones de Casimir para una cavidad conductora con sección transversal cuadrangular $a_1 = a_2 = a$ y longitud $a_3 = d$. Tal como lo mostramos con anterioridad, en el caso en que $L \ll a$, equivalente a la configuración de placas paralelas estándar, tanto \mathcal{E} como P_z son fuertemente negativas, con $P_z \simeq 3\mathcal{E}$, mientras que $P_x = P_y \simeq -\mathcal{E}$ son positivas. A medida que se alteran las dimensiones de la cavidad, de modo que $a \sim d$, tanto \mathcal{E} , como P_z se vuelven menos negativas, hasta que al alcanzarse una configuración cúbica $P_x = P_y = P_z = \mathcal{E}/3 > 0$, es decir, las fuerzas de Casimir en las tres direcciones se vuelven repulsivas. Si seguimos alargando la cavidad, de modo que $d \gg a$ (como en una fibra), se cumplirá ahora que $P_z = -\mathcal{E} > 0$, mientras que $P_x = P_y = \mathcal{E} < 0$. En este caso, tenemos una fuerzas repulsiva entre las placas que determinan los extremos de la fibra y fuerzas atractivas entre las placas que conforman su cuerpo.

Los resultados derivados para las presiones y densidad de energía de Casimir en una cavidad rectangular, se mantienen en forma cualitativa para geometría similares. Al igual

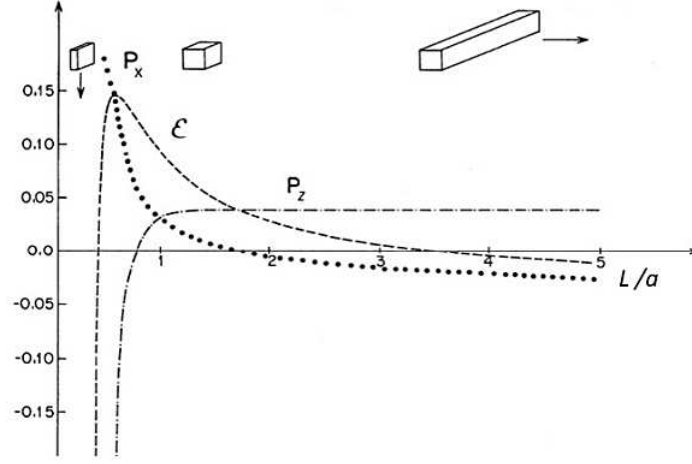


Figura 3: Variación de la densidad de energía \mathcal{E} y las presiones $P_x = P_y$ y P_z en una cavidad con paredes perfectamente conductoras de longitud d y con sección transversal de área a^2 , como función de la geometría determinada por el parámetro d/a . Para $d/a \ll 1$, se recuperan los resultados equivalentes a placas paralelas. Cuando $d/a = 1$ se tiene una cavidad cúbica, mientras que para $d/a \gg 1$, se tiene una fibra.

que en el caso de una cavidad cúbica, la presión radial de Casimir es repulsiva para una cavidad esférica, mientras que para una cavidad cilíndrica alargada, las presiones se comportan como en la fibra cuadrangular. Sin embargo, los cálculos involucrados en estas geometrías son mucho más complicados. Resulta interesante mencionar que el comportamiento de la presión para caso de la cavidad esférica dio al traste con un modelo del electrón propuesto por Casimir en 1953. En este modelo, se suponía que el electrón era un cascarón esférico de carga en que la fuerza coulombiana repulsiva era balanceada por la presión radial atractiva asociada a las fluctuaciones del vacío.

El estudio de las fluctuaciones del vacío confinadas en diferentes configuraciones a $T = 0$, puede extenderse para considerar las fuerzas de Casimir asociadas a fluctuaciones térmicas, es decir, a los efectos de frontera en la radiación de cuerpo negro. Un enfoque directo consiste en evaluar las cantidades termodinámicas relevantes tales como la densidad de energía interna \mathcal{E} , de entropía \mathcal{S} , de energía libre $\mathcal{F} = E - TS$ empleando la densidad de modos derivada en el caso de temperatura nula $\rho(\omega)$, la cual es independiente de la temperatura. En el caso de la cavidad conductora rectangular la densidad de energía libre de Helmholtz del sistema está dada por

$$\mathcal{F} = \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\hbar\omega}{2} - k_B T \ln(1 + e^{-\hbar\omega/k_B T}) \right) \rho(\omega), \quad (15)$$

en donde k_B es la constante de Boltzmann. Las expresiones resultantes son complicadas

y dan lugar a cantidades infinitas difíciles de interpretar y de manejar. Sin embargo, una configuración que estudiaremos a continuación permite cancelar las divergencias y conduce a resultados finitos con una interpretación física clara.

4. Pistón de Casimir

El pistón de Casimir consiste de una cavidad rectangular de paredes conductoras con una placa conductora intermedia, como en la figura 2. Es claro que esta configuración es equivalente al problema de dos cavidades conductoras adyacentes como las discutidas en los párrafos anteriores, de manera que podemos utilizar las mismas expresiones en el cálculo. Sin embargo, en este caso podemos determinar la diferencia de presiones de Casimir ejercidas sobre ambas caras de la placa intermedia, lo cual permite cancelar las contribuciones divergentes mencionadas arriba. Para un pistón de longitud total L , con la placa situada a una distancia a_3 de una de las paredes del fondo, la diferencia de presiones es $\Delta P = P(a_3) - P(L - a_3)$.

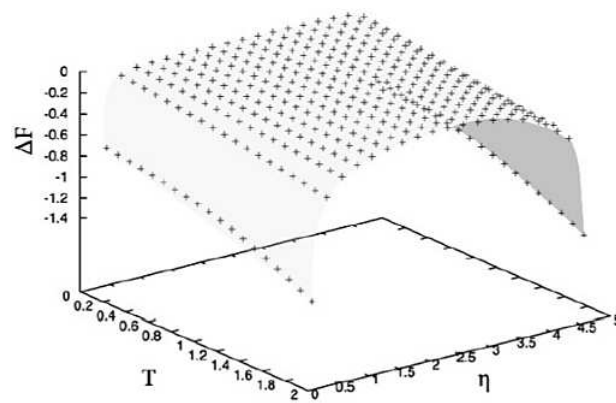


Figura 4: Diferencia de energías libres en un pistón de longitud $L = 5\mu\text{m}$, con sección transversal cuadrangular de $a^2 = 1\mu\text{m}^2$ en función de la temperatura T en unidades de $1/k_B a$ y de la posición relativa de la interfaz $\eta = a_3/a$. Adaptado de [4].

A su vez, ésta puede obtenerse derivando la diferencia en las densidades de energía de ambos lados de la placa $\Delta P = \partial\Delta\mathcal{E}/\partial a_3$. Es conveniente determinar $\Delta\mathcal{E}$ respecto de una configuración de referencia en el que la placa se encuentra en medio de la cavidad: $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}(a_3) + \mathcal{F}(L - a_3) - 2\mathcal{F}(L/2)$ de manera que las cantidades termodinámicas resultantes sean nulas cuando la placa se encuentra en el punto medio. Con este procedimiento, las variables termodinámicas calculadas son finitas y continuas, como podemos apreciar en las figuras 4 y 5 para el caso de las diferencias de la densidad de energía libre de Helmholtz y de la presión. En este último caso, podemos apreciar que la diferencia de presión

es negativa cuando el pistón se encuentra muy cercano a una de las paredes del fondo, digamos el lado izquierdo de la cavidad, como en el caso del efecto Casimir entre placas.

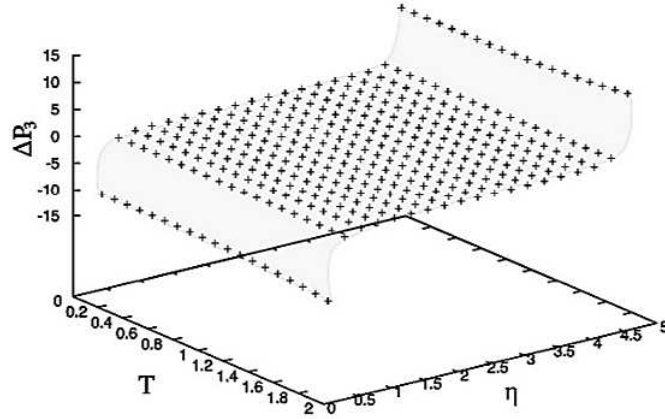


Figura 5: Diferencia de presiones en un pistón de longitud $L = 5\mu\text{m}$, con sección transversal cuadrangular de $a^2 = 1\mu\text{m}^2$ en función de la temperatura T en unidades de $1/k_B a$ y de la posición relativa de la interfaz $\eta = a_3/a$. Adaptado de [4].

A medida que el pistón se aleja, la diferencia de presiones disminuye hasta volverse nula cuando el pistón se encuentra justo en medio de la cavidad. Posteriormente, al desplazarse más a la derecha, la presión se vuelve positiva, es decir, la fuerza de Casimir asociada es repulsiva. Sin embargo, esto también puede interpretarse como que la fuerza es atractiva respecto de la pared del lado derecho. Aunque parezca sorprendente, este tipo de resultados ha generado controversias respecto de la existencia de fuerzas repulsivas de Casimir asociadas a la geometría de un sistema. A la fecha, la controversia no está resuelta y no se han medido aún fuerzas de Casimir repulsivas en este tipo de sistemas.

5. Fuerzas de Casimir en materiales dispersivos.

Como se mencionó en la introducción, las fuerzas de Casimir han sido medidas con gran precisión y concuerdan en forma semi-cuantitativa con las predicciones de Casimir para placas conductoras perfectas. Sin embargo, es necesario tomar en cuenta de manera realista las correcciones inducidas por la conductividad finita de las placas, la rugosidad, la falta de paralelismo entre ellas a distancias nanométricas, los efectos de temperatura finita, etc. En 1956, Lifshitz propuso una teoría macroscópica para dos placas dieléctricas semiinfinitas caracterizadas por una función dieléctrica dependiente de la frecuencia $\epsilon(\omega)$ y separadas por una distancia L . La derivación propuesta por Lifshitz es extremadamente complicada, por lo que es difícil de generalizar a situaciones más generales, por

ejemplo, aquellas en que existen efectos no locales en la respuesta dieléctrica, capas delgadas, materiales nanoestructurados, o a regiones del espectro en que la noción de función dieléctrica tiene dificultades de interpretación. Un cierto número de derivaciones alternativas a la de Lifshitz han sido propuestas empleando diversas aproximaciones. Una de éstas consiste en calcular la presión como la diferencia en el flujo de momento del campo electromagnético que incide sobre las superficies externa e interna de las paredes de la cavidad confinante.

Para calcular el flujo de momento del campo conviene determinar la densidad de estados de momento lineal ρ_k derivada las reflexiones múltiples que sufriría un modo k (con $k = \omega/c$) del campo electromagnético del vacío confinado entre las dos placas. Consideremos dos placas $a = 1, 2$ en el vacío, paralelas al plano xy y separadas por una distancia L con fronteras interiores situadas en $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$. Las placas pueden ser opacas o transparentes, disipativas, inhomogéneas en la dirección z , etc., es decir, tienen una respuesta arbitraria ante la acción de un campo electromagnético. Supongamos que un modo k del campo de vacío incide sobre una de las placas en polarización s , con el vector eléctrico paralelo a la superficie de la placa, o en polarización p , con el vector eléctrico sobre el plano de incidencia normal a la placa, y con un vector de onda $\mathbf{q} = (\mathbf{Q}, \pm k)$. El vector \mathbf{Q} es la componente del vector de onda paralela a la superficie, mientras que $\pm k$ denota sus componentes normales.

La respuesta del material a la acción del campo está caracterizada por las amplitudes de reflexión del campo r_a^s, r_a^p . La presión que ejercen las fluctuaciones del vacío sobre cualquiera de las placas está determinada por la diferencia del flujo de momento asociado a dichas fluctuaciones entre el lado derecho e izquierdo de la placa. Para ello podemos considerar que un fotón del vacío caracterizado por k, \vec{Q} y en polarización α , tiene un momento lineal $\pm \hbar k$ y se mueve con una velocidad con proyección en la dirección z dada por $\pm c \cos \theta = \pm ck/q$, de modo que su contribución al flujo de momento es $\hbar ck^2/q$. El flujo total de momento se obtiene multiplicando esta contribución por la densidad de estados del vacío correspondientes ρ_k y por el número de ocupación de fotones en el estado k a una temperatura T

$$n(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar ck} - 1}, \quad (16)$$

(con $\beta = 1/k_B T$) y sumando sobre k, \vec{Q} y sobre ambas polarizaciones. La densidad de estados del vacío ρ_{k^2} puede obtenerse calculando las funciones de Green, soluciones de la ecuación de Helmholtz inhomogénea que satisface cada una de las componentes del campo,

$$\nabla^2 G_\alpha^{E,B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_\alpha^{E,B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (17)$$

mediante la relación

$$\rho_{k^2}^\alpha = \frac{1}{2\pi} \text{Im} (G_\alpha^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + G_\alpha^B(\mathbf{r}, \mathbf{r})), \quad (18)$$

en donde las funciones de Green eléctrica G^E y magnética G^B cumplen con las condiciones de frontera electromagnéticas, es decir, la componente tangencial a la superficie del campo eléctrico (E_{\parallel}) debe anularse, así como la componente normal del campo magnético (B_{\perp}).

La forma explícita de las funciones de Green proviene de una suma de reflexiones múltiples de los fotones del vacío sobre las placas paralelas, lo que da lugar a una expresión con una estructura de serie geométrica. Para la polarización s se tiene

$$\rho_{k^2}^s = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left[\frac{1 + r_1^s r_2^s e^{2ikL}}{k(1 - r_1^s r_2^s e^{2ikL})} \right], \quad (19)$$

independientemente de z . La densidad $\rho_{k^2}^p$ correspondiente a la polarización p , puede derivarse en forma similar; su expresión puede obtenerse reemplazando en (19) los superíndices $s \rightarrow p$. La densidad total de estados está dada entonces por $\rho_{k^2} = \rho_{k^2}^s + \rho_{k^2}^p$.

La combinación de los elementos anteriores nos permite escribir la expresión para la fuerza por unidad de área P que ejerce el campo de vacío sobre la superficie de cualquiera de las placas. Para determinar la presión sobre la superficie externa, basta considerar que $r_s = r_p = 0$. La presión resultante sobre las placas es entonces la diferencia entre las presión externa e interna dada por

$$P = \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int_0^\infty dQ Q \int_{q \geq 0} dk \frac{k^3}{q} \text{Re} \frac{1}{k} \left[\frac{1}{1 - r_1^s r_2^s e^{2ikL}} + \frac{1}{1 - r_1^p r_2^p e^{2ikL}} \right]. \quad (20)$$

La fórmula derivada por Lifshitz se recupera introduciendo en (20) las amplitudes de Fresnel en términos de las funciones dieléctricas locales $\epsilon(\omega)$:

$$r_a^s = \frac{k - k_a}{k + k_a} \quad r_a^p = \frac{k_a - \epsilon_a(\omega)k}{k_a + \epsilon(\omega)k}, \quad (21)$$

mientras que para el caso de metales perfectamente reflectores la sustitución $r_a^\alpha = \pm 1$ conduce a la fórmula de Casimir.

En resumen, si se conocen expresiones teóricas o derivadas del experimento para los coeficientes de reflexión, la expresión (20) permite calcular las fuerzas de Casimir en una gran diversidad de sistemas, como aquellos formados por heteroestructuras, torcas de Casimir, esferas dispersivas colocadas sobre superficies planas, estructuras fotónicas, configuraciones con propiedades dispersivas no locales, etc. Las predicciones derivadas de esta teoría son las que realmente se comparan con el experimento. Cabe hacer notar que, en este caso, las predicciones teóricas para el comportamiento de las fuerzas a distancias de unos cientos de nanómetros concuerdan con el experimento con una precisión de alrededor del 1%. Sin embargo, a distancias del orden de una micra, existen discrepancias que

hasta ahora no han sido explicadas. Por otro lado, correcciones a las fórmulas de Lifshitz para distancias muy cortas fueron discutidas hace casi cuatro décadas por Barrera y Gerlach, con el interesante resultado de que éstas son finitas a separación nula. Es claro que se requiere más de mayor investigación para acercarnos más a una descripción realista de las fuerzas de Casimir.

6. Fuerzas de Casimir electrónicas y acústicas.

El formalismo anterior, con algunas modificaciones, ha sido empleado para el cálculo de otras manifestaciones asociadas a fluctuaciones de campos confinados, como son las fuerzas de Casimir derivadas de fluctuaciones electrónicas en un medio conductor, o aquellas provenientes de fluctuaciones del campo de sonido en un líquido. En el caso electrónico, podemos una configuración formada por dos materiales conductores separados por una ranura delgada, de manera que puede ocurrir tunelamiento electrónico entre ambos materiales. La fuerza resultante se deriva calculando el flujo de momento proveniente del traslape de los campos electrónicos evanescentes, cuya función de onda es solución de la ecuación de Schrödinger del sistema. Esta solución está determinada por los coeficientes de reflexión r_1, r_2 asociados a las interfaces entre las zonas conductoras y la región aislante. La fuerza por unidad de área para un campo electrónico de masa m es:

$$\frac{F(L)}{A} = \frac{1}{\pi^2} \text{Re} \int dk \left(E_F - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) k^2 \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}}, \quad (22)$$

donde k_F es la energía de Fermi. La fuerza resultante es de carácter atractivo, pero extremadamente pequeña, dado que la masa finita de los electrones restringe considerablemente el alcance de las interacciones. La existencia de este tipo de fuerzas aún no ha sido confirmada experimentalmente.

Un sistema relacionado es el del vacío de Dirac para electrones relativistas en un campo magnético externo constante B . Es bien conocido que en este sistema los electrones ocupan niveles de Landau de energía $E_n^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 + 2neB$, donde p es la magnitud de su momento, e la carga, y m su masa. Si denotamos por $\Delta E = \sum_n (E_n - E_0)$, donde E_0 corresponde a la situación en ausencia del campo magnético, resulta que el vacío de Dirac desarrolla tensión paralelas y perpendiculares al campo de la forma

$$P_{\parallel} = -\Delta E + \left(\frac{eb}{12\pi^2 m} \right)^2 \quad P_{\perp} = 2\Delta E - \left(\frac{eb}{90\pi^2 m} \right)^2. \quad (23)$$

Otro sistema que puede ser tratado de manera similar es el de las fuerzas derivadas de fluctuaciones acústicas, las cuales son de carácter macroscópico y han sido plenamente verificadas. El dispositivo experimental utilizado es un tanque de agua conectado a bocinas que producen ruido de gran intensidad. En el tanque se colocan placas paralelas reflectoras del ruido, de manera que efectivamente se crea una fuerza entre las placas

proveniente de las restricciones que estas placas imponen sobre los modos acústicos del sistema.

7. Efecto Casimir en sistemas no inerciales.

Existen efectos tipo Casimir que asociados a la distorsión de la densidad espectral de la energía del vacío libre $\rho_E(\omega) \sim \omega^3$, ya no por fronteras físicas, sino por la acción de campos externos, o aún por la deformación del espacio tiempo asociada a sistemas no inerciales. Uno de los casos más simples corresponde al vacío cuántico confinado entre dos placas que se aproximan o alejan entre si con una velocidad constante v . Si ésta es pequeña comparada con la velocidad c de la luz, de modo que la razón $\zeta_0 \equiv v/c \ll 1$, la densidad de energía de Casimir del sistema cuando las placas están separadas por una distancia L_t al tiempo t , tiene la forma

$$\mathcal{E}(L_t) \approx -\frac{\hbar c \pi^2}{720 L_t^4} + \frac{\hbar c \zeta_0^2}{18 L_t^4}, \quad (24)$$

en donde el primer término representa la contribución usual, mientras que el segundo es una corrección de segundo orden que tiende a disminuir la densidad de energía de Casimir del sistema, independientemente de si las placas se separan o aproximan. Esto puede interpretarse como una ausencia de energía asociada a modos cuya frecuencia $\omega \sim c/L_t$ no les ha permitido alcanzar su configuración de estado estacionario. Por tanto, es necesario considerar la existencia de dos vacíos diferentes, $|0\rangle$ y $|0_t\rangle$, asociados a espacios de Fock estático y dinámico, en donde el primero corresponde al estado estacionario de las placas separadas por una distancia L , y el segundo a la configuración instantánea de las placas separadas por una distancia L_t . Los operadores de creación y aniquilación correspondientes, $\{a_k^\dagger, a_k\}$ y $\{b_k^\dagger, b_k\}$, satisfacen las relaciones $\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k$, con $a_k|0\rangle = 0$ y similarmente, $\hat{n}_{k,t} = b_k^\dagger b_k$, con $b_k|0_t\rangle = 0$. Un punto crucial es que los modos de frecuencia positiva del vacío dinámico pueden expresarse como una suma de modos de frecuencia positiva y negativa del vacío estático, de modo que lo que corresponde a partículas de energía positiva en un sistema se expresa como una superposición de partículas y antipartículas en el sistema dinámico o, en el caso de los fotones, a una superposición de fotones emitidos y absorbidos. Una consecuencia es que la corrección a la energía por unidad de volumen asociada al movimiento entre las placas está dada por:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\hbar c}{2\pi^2 L_t^4} \sum_n \int d^2k \langle 0_t | a_k^\dagger a_k | 0_t \rangle \hbar\omega_{n,\mathbf{k}} = \frac{\hbar c \zeta_0^2}{18 L_t^4}, \quad (25)$$

lo que es consistente con (24).

En general, la ruptura la invariancia de Lorentz del estado de vacío cuántico por movimientos acelerados da lugar a densidades de energía y presiones de Casimir. Si considera-

mos un observador sujeto a una aceleración uniforme a en el vacío cuántico, la densidad de energía por modo tiene la forma

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right). \quad (26)$$

Notamos que la densidad espectral del vacío libre se ve alterada por una distribución de tipo planckiano, similar a la observada para la radiación electromagnética de un cuerpo negro negro con una temperatura equivalente $k_B T = a/2\pi$. Sin embargo, no existe un reservorio de calor a temperatura constante en este sistema. Puede demostrarse que este efecto proviene de la distorsión de la densidad espectral libre por el corrimiento Doppler de las frecuencias observado en un sistema de referencia uniformemente acelerado.

Un fenómeno similar ocurre para las fluctuaciones del vacío en espacio-tiempos curvos. Según el Principio de Equivalencia de la Teoría de la Relatividad General, dado que los sistemas acelerados son localmente equivalentes a la existencia de campos gravitacionales, lo mismo ocurrirá para el campo de vacío sujeto a la curvatura del espacio-tiempo en la vecindad de un cuerpo gravitante. Un caso particular es el conocido fenómeno de la radiación de hoyos negros de Hawking: Si consideramos las fluctuaciones de vacío de un campo cuántico escalar y sin masa alrededor un hoyo negro de Schwarzschild bidimensional de masa M , el valor esperado de la energía por unidad de volumen y por modo es

$$\mathcal{E}(\omega) = 2 \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)^{1/2} \frac{\hbar\omega}{\pi c} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/A} - 1} \right), \quad (27)$$

en donde r_0 es la distancia al hoyo negro de un observador en reposo y el parámetro $A = 1/8\pi MG$, con G la constante de gravitación universal (la frecuencia aparece únicamente a la primera potencia porque la métrica considerada reduce en dos la dimensionalidad del espacio-tiempo). De nuevo aparece un distribución planckiana, como si el hoyo negro calentara el vacío a su alrededor. Sin embargo, este fenómeno podría ser una consecuencia del corrimiento Doppler gravitacional de la frecuencias involucradas en la densidad espectral del vacío libre y no necesariamente debido a una evaporación de energía, como normalmente se interpreta la radiación de Hawking.

Un fenómeno que ha cobrado relevancia por hallazgos actuales, es el de las fluctuaciones cuánticas del campo de Higgs en espacio-tiempos con dimensiones espaciales compactas. Si el grado de compactificación es suficiente, las fluctuaciones del campo pueden dar lugar a una tensión que tiende a colapsar dichas dimensiones. Este colapso puede ser evitado por la energía potencial promedio del campo de Higgs, dando lugar a un estado de equilibrio en que ciertas dimensiones pueden alcanzar una dimensión finita. Quizás resultaría pertinente seguir investigando este esquema de compactificación del espacio-tiempo.

8. Perspectivas.

El estudio de las fluctuaciones de energía reviste perspectivas futuras de todos los órdenes. Existen especulaciones de que el campo de punto cero podría representar una componente fundamental o la totalidad de la energía oscura del Universo. También podría jugar un papel como mecanismo de compactificación de dimensiones extra en las teorías de gran unificación. Otra interrogante es si la mecánica cuántica representaría una teoría efectiva, cuyos estados y valores propios serían consecuencia de las interacciones de las partículas con el campo de punto cero. A otro nivel, se requieren investigaciones para tratar de entender cómo influyen las fluctuaciones del vacío cuántico en el diseño y funcionamiento de micro y nanoestructuras. También nos preguntamos si existen fuerzas de Casimir repulsivas derivadas de la geometría. Por lo demás, las predicciones teóricas de las fuerzas de Casimir a temperatura finita, no concuerdan con los resultados experimentales. Algunas de estas perspectivas posiblemente serán desarrolladas teóricamente o verificadas en experimentos desarrollados por la eventual lectora o lector de este capítulo.

9. Algunas lecturas recomendadas

A continuación sigue una lista de publicaciones, recomendadas por el autor, para profundizar en este tema.

1. P. W. Milonni, *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press Incorporated, New York, 1994.
2. K. A. Milton, *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. World Scientific Publishing Company Incorporated, Singapore, 2001.
3. W. L. Mochán, C. Villarreal, and R. Esquivel-Sirvent, "On Casimir forces for media with an arbitrary dielectric properties," *Revista Mexicana de Física*, vol. 48, no. 4, pp. 339–342, 2002.

10. Referencias

- [1] H. B. G. Casimir, "On the attraction between two perfectly conducting plates," *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, vol. 51, no. 7, p. 793, 1948.
- [2] U. Mohideen and A. Roy, "Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm ," *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 21, pp. 4549–4552, 1998.

- [3] L. de la Peña, "Stochastic electrodynamics: Its development, present situation, and perspectives," in *Stochastic Processes Applied to Physics and other Related Fields*, B. Gómez, S. M. Moore, A. M. Rodríguez-Vargas, and A. Reuda, Eds. World Scientific Publishing Co. Pty. Ltd, 1983, pp. 428–581.
- [4] M. Lomnitz and C. Villarreal, "Thermal fluctuations in casimir pistons," in *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, vol. 14, no. 01. World Scientific, 2012, pp. 425–434.