

Evolución, autoorganización y otros números del montón

Octavio Miramontes

Departamento de Sistemas Complejos
Instituto de Física
Universidad Nacional Autónoma de México
México 04510, DF
y
Centro de Ciencias de la Complejidad
Universidad Nacional Autónoma de México
México 04510, DF
octavio@fisica.unam.mx

A la memoria de Brian C. Goodwin (1931-2009)

1. Evolución

La evolución es una tendencia generalizada en la naturaleza. Desde el origen del universo y su expansión inicial, en un posible evento súper-energético ocurrido hace aproximadamente 13 mil millones de años, las primeras manifestaciones materiales en forma de partículas elementales, luego átomos y posteriormente moléculas revelan una tendencia evolutiva universal hacia formas y estructuras micro y macro de creciente complejidad que podemos observar hasta hoy en día [1]. Es una cuasi-ley de la naturaleza el hecho de que en los sistemas fuera del equilibrio termodinámico, en los que existen flujos de materia y energía, se tienda a la evolución espontánea de nuevas formas y de nuevos ordenes espacio-temporales [2]. La naturaleza, en pocas palabras, es sumamente creativa y podría agregarse, inevitablemente innovadora. En todo lo que nos rodea podemos ver expresada esa característica, en la forma de estructuras de gran escala como las galaxias, los sistemas solares, los planetas, los continentes y los océanos. Incluso, antes del surgimiento de la vida, el universo ya conocía las leyes del cambio dinámico, del equilibrio homeostático y de la evolución. Los sistemas planetarios con

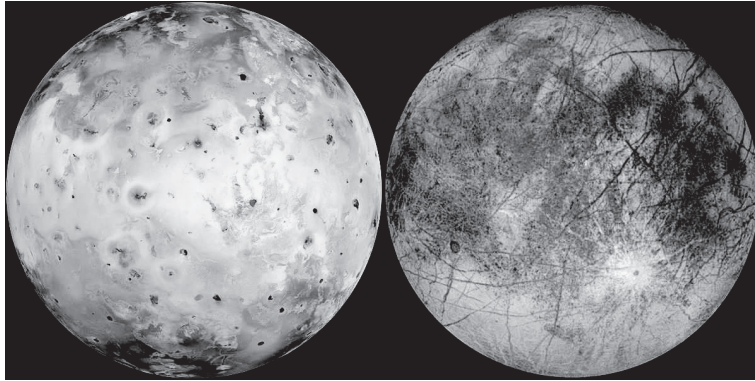


Figura 1: La evolución es una propiedad generalizada e inevitable de la naturaleza. La evolución de la materia ha generado, de manera autoorganizada, formas nuevas con características sumamente complejas como son las condensaciones de materia en forma de planetas o lunas. Estas estructuras, a su vez, llegan a tener dinámicas propias muy ricas como el vulcanismo, los océanos, las atmósferas y el clima. Eventualmente pueden llegar a tener condiciones fisicoquímicas propicias para la emergencia de la vida. A la izquierda la luna Io de Júpiter que es el objeto con el vulcanismo más activo de todos los cuerpos celestes conocidos. A la derecha, la luna Europa también de Júpiter que tiene una superficie congelada y cuyo interior pudiera albergar océanos de agua líquida y -posiblemente- vida.

planetas semejantes a la Tierra, estuvieron y están llenos de gran actividad geológica, volcánica y climática como lo atestigua no sólo la Tierra, sino las tormentas de viento en Marte, las tormentas eléctricas en Júpiter, el vulcanismo extremo en la luna Io y los mares de la luna Europa. Esta tendencia evolutiva en los sistemas planetarios nos hace pensar en la existencia de otros mundos, de otros planetas donde se dieron -y aún se dan- las condiciones ideales para la emergencia, prevalencia y evolución de las biomoléculas.

La vida, no es sino una etapa más en la inevitable evolución de la materia. Por ello es de pensarse que exista en diversos confines del universo y que la vida en la Tierra tal como la conocemos, sea un mero ejemplo de un proceso generalizado, una consecuencia de la incansable fuente creativa del universo en expansión. Si bien, los pasos exactos que condujeron al origen de la vida en el universo continúan siendo un misterio es de imaginarse, dado el cúmulo de evidencia científica, que la materia viva surgió como una propiedad emergente de los polímeros orgánicos que, por su tamaño relativo y estructura, tienen la capacidad de codificar y almacenar información y pueden además autoreplicarse.

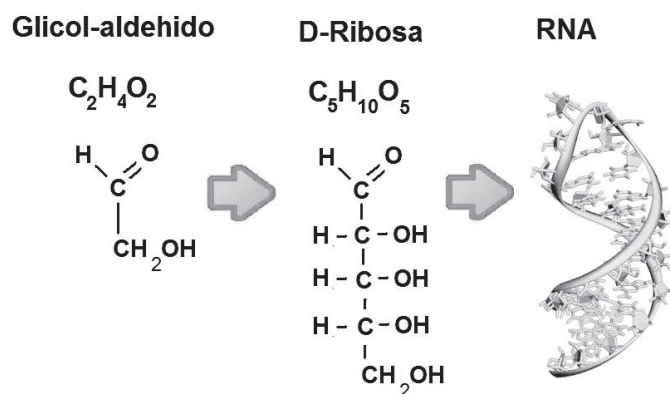


Figura 2: La molécula glicolaldehído fue recientemente identificada en el medio interestelar y fuera de nuestro sistema solar. Es químicamente precursora de la ribosa, que es un monosacárido constituyente del ARN. Su existencia en regiones lejanas del universo confirma la tesis de la evolución química hacia formas de creciente complejidad, antecedentes de las primeras moléculas con capacidad de codificación y autoreplicación, esenciales para la vida.

Tales polímeros orgánicos serían el producto de un proceso generalizado de evolución química que ha producido a lo largo de la existencia del universo formas moleculares de creciente complejidad [3, 4]. Tales moléculas, ingredientes esenciales de la vida, se encuentran presentes incluso en el medio interestelar como es el caso de Glicolaldehído (CH_2OHCHO), un azúcar monosacárido químicamente precursor de la ribosa que es un constituyente clave del ARN [5].

Las biomoléculas precursoras de la vida en la Tierra, ya sea ensambladas localmente o provenientes del espacio exterior, llegaron en su curso evolutivo a autoensamblarse protegiéndose del medio externo mediante una estructura membranosa es decir una protocélula autocontenida, a la que Alexander Oparin llamó coaservados [6] y Sydney Fox microesferas proteínoides [7]. Podría decirse, a partir de este momento, que los organismos vivos autónomos hicieron su aparición en la Tierra y eso debió haber ocurrido hace por lo menos 3.5 mil millones de años, fecha en la que se tiene registrado el fósil más antiguo conocido, un microorganismo fotosintetizador colonial llamado cianobacteria [8]. El registro fósil de la vida en la Tierra contiene entonces una enorme muestra de los organismos que en distintas épocas han poblado el planeta, mucho de ellos ya extintos y algunos de ellos poco diferentes de los que actualmente se encuentran entre nosotros.

El registro fósil, que es la secuencia de fósiles y su ubicación tem-

poral relativa en los diferentes estratos geológicos, permite conocer las diferentes etapas sucesivas de la evolución de los organismos vivos en la Tierra. Ya en la antigüedad, Aristóteles observó que los fósiles de conchas marinas incrustados en rocas eran similares a las conchas que se podían encontrar comúnmente en la playa lo cual le hizo pensar que los fósiles fueron en tiempos remotos organismos vivos. A la misma conclusión llegó Leonardo da Vinci y otros estudiosos como Avicena y Alberto de Sajonia. Pero fue el ingeniero inglés William Smith, el primero en correlacionar el fósil con la antigüedad del substrato geológico en el que se encontraba, dando así una manera de medir la antigüedad del fósil.

Smith, sin embargo, no llegó a ninguna conclusión sobre la sucesión de especies que implica el registro cronológico de fósiles. De hecho esta sucesión cronológica fue uno de los principales argumentos usados por Charles Darwin para apoyar la idea de la evolución biológica. Fue Darwin y sus contemporáneos, principalmente Alfred Russel Wallace, los primeros en relacionar la estructura jerárquica del árbol lineano de la vida con el registro fósil. Darwin describió entonces un proceso de descendencia con modificaciones (evolución), en donde los organismos o se adaptaban a cambios medioambientales o perecían. Estas ideas fueron expuestas en su clásico *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*, que vio la luz en 1859.

El título mismo del libro indica que Darwin debió tomar partido sobre el caso de la única especie biológica cuya explicación de su origen no iba a ser socialmente aceptada tan fácilmente, bajo los nuevos argumentos darwinianos de cambios evolutivos: el hombre. De hecho y dado que se trataba de un tema por demás espinudo, Darwin lo abordó directamente; pero más tarde, en otro de sus celebrados libros: *The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex*, en donde se argumenta que el hombre es un animal y es una sola especie en todo el planeta y que, desde luego, es producto de la evolución biológica.

Tal concepción evolutiva del origen del hombre provocó la ridicularización de sus ideas y las de Wallace por parte del conservadurismo religioso de la época. Pero esto a final de cuentas no es sorpresa, ya antes Copernico sufrió los embates del oscurantismo al defender un sistema planetario heliocéntrico, Galileo Galilei encarnó los castigos y la furia de la Santa Inquisición por defender la rotación de la Tierra; pero fue Giordano Bruno quien simbolizó para la posteridad lo que un libre pensador, un revolucionario, puede esperar de parte de la institucionalidad retrograda, siempre tan solícitamente dispuesta a estirar la mano



Figura 3: Con una buena dosis de humor inglés, la moneda de dos libras conmemorativa del bicentenario del nacimiento de Charles Darwin muestra, en una de sus caras, un perfil de Darwin frente al perfil de un chimpancé. <http://www.royalmint.com/store/BritishBase/UKCDBU.aspx>

para encender el fuego purificador de la hoguera divina.

Darwin y Wallace en vida no fueron chamuscados vivos; pero fueron rebajados a la condición de chimpancés barbudos, cortesía de Samuel Wilberforce, en aquellos días Obispo de Oxford y desde entonces no han dejado de ser sujetos de ataques ¹.

El darwinismo, como escuela de pensamiento en biología, se encuentra actualmente en jaque golpeado por dos lados simultáneamente. El primer golpeador, sigue siendo el mismo pensamiento retrogrado de siempre que niega la evolución biológica y antepone el dogma de la fe argumentando a favor del creacionismo. Este viejo opositor se parapeta en la actualidad en su renovada pero reciclada versión contemporánea: el diseño inteligente. La segunda fuerza que frena el libre desarrollo de las ideas evolutivas iniciadas por Darwin y Wallace es un enemigo interno también religioso, agazapado inesperadamente en los laboratorios de biología y no necesariamente entre las sotanas y los crucifijos. Se trata de los defensores acérrimos del matrimonio darwiniano-mendeliano (DM) quienes asumen igualmente una defensa dogmática de la selección natural y la lucha por la existencia como fuerzas creativas de la naturaleza, este pensamiento tiene su máximo exponente en la tristemente celebre figura del “gen egoísta” que nos dice que los organismos biológicos no son otra cosas que meros vehículos para la propagación

¹Curiosamente, en el marco de las conmemoraciones del bicentenario del nacimiento de Darwin, la Iglesia Anglicana emitió un comunicado público disculpándose ante Darwin por “haberlo malinterpretado y por haber inculcado en otras personas tal malinterpretación”. <http://www.cofe.anglican.org/darwin/malcolmbrown.html>.

del gen [9].

El paradigma DM, comúnmente llamado síntesis moderna, neodarwinismo o ultradarwinismo [10], establece que la segregación mendeliana y las mutaciones al azar proporcionan los mecanismos para mantener la variancia poblacional sobre la cual actúa la selección natural. Por su parte, la selección es vista como proveedora de fuerzas disruptivas, direccionales o estabilizadoras que actúan sobre las poblaciones y que conducen a la divergencia fenotípica, a cambios direccionales o a la estasis. A su vez y dentro de la concepción panadaptacionista, todas las características de un organismo deben estar máximamente adaptadas mediante la selección natural. Sin embargo, la posibilidad de que la divergencia, cambios direccionales o estasis puedan deberse parcialmente a restricciones autoorganizadas de los organismos no se ha incorporado aún como una parte integral del pensamiento evolutivo [11]. Lo anterior no por falta de evidencia o por la ausencia de un cuerpo teórico suficientemente maduro sino por la resistencia y rechazo, afortunadamente decreciente, de la religiosidad protagonizada por las batas blancas del pensamiento ultradarwinista.

2. Autoorganización

La probable contribución de los organismos a su propia evolución mediante autoorganización, es decir, de factores intrínsecos y no sólo de factores externos de naturaleza estocástica es un tema pobremente estudiado. De hecho y debido al paradigma dominante de las mutaciones al azar se ha producido, en la tradición del pensamiento moderno, la imagen de los organismos biológicos como meras acumulaciones accidentales de características que se fijan [11]. Sin embargo, recordemos que hasta el momento nadie se ha adjudicado el honor de haber producido experimentalmente una nueva especie a partir de mutaciones acumuladas de manera persistente. . . ¡y vaya que si se ha intentado!

Stuart Kauffman, al igual que otros biólogos teóricos como Brian Goodwin, ha planteado la siguiente línea argumentativa [11]. Si pudiéramos atestiguar de nuevo el surgimiento y evolución de la vida en la Tierra y dado que las formas vivas son meros accidentes históricos producto de mutaciones aleatorias (lo que propone el pensamiento ultradarwinista), las nuevas formas vivas resultantes, ¿serían semejantes en función y morfología a las que conocemos como ejemplos en la Tierra (vivas o extintas)? El pensamiento evolutivo dominante no tiene una respuesta clara frente a esta pregunta, incluso cuando estamos hablando de ciencia y esta debe ser mínimamente predictiva. ¿Cuáles serían

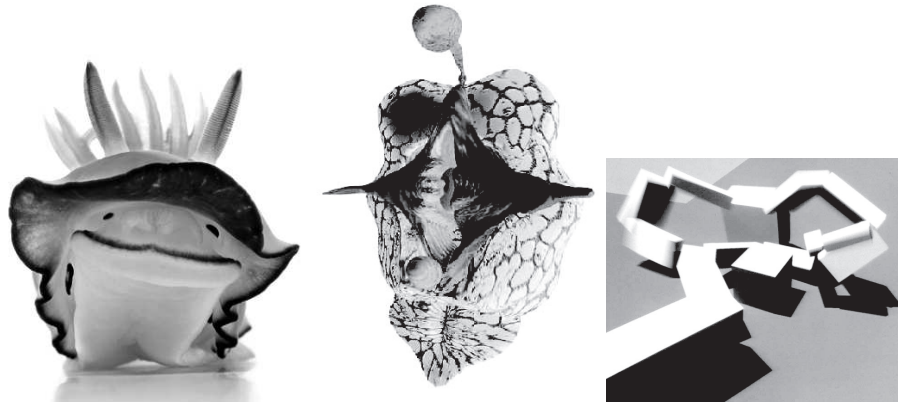


Figura 4: “Rebobinar la película” es como se conoce el experimento hipotético que repite el origen y evolución de la vida una y otra vez. ¿Qué se obtendría? Tendríamos tres posibles escenarios. En el primero obtendríamos exactamente la misma flora y fauna que vemos hoy en día, como el gasterópodo en la foto de la izquierda. Esta situación se antoja altamente improbable debido a las fluctuaciones históricas. En el segundo escenario las formas vivas resultantes no corresponderían a las conocidas actualmente; pero serían reconocibles y próximas morfológicamente a las actuales, como lo muestra la forma en la foto del centro que corresponde a un organismo hipotético generado por computadora. El último escenario correspondería a una flora y fauna totalmente diferentes a las conocidas; por ejemplo el organismo que aparece en la foto de la derecha que sería un tipo de “anélido” con segmentos cúbicos. Este tipo de organismos serían altamente improbables porque su morfología viola principios de optimización dado por las leyes de la física y este tipo de restricciones son inevitables en el curso de la evolución de la vida [12].

aquellas propiedades que serían diferentes?, ¿Cuáles serían iguales?, ¿Veríamos nuevamente aparecer la fotosíntesis, la reproducción sexual, la emergencia de los cordados?

Y si fuéramos capaces de repetir una y otra vez el experimento donde vieramos surgir de nuevo la vida en la Tierra o en otros planetas, ¿qué veríamos? Si ese experimento fuera posible, veríamos un conjunto de atributos funcionales y morfológicos que no se repetiría, que sería característico de las especies accidentalmente formadas; pero también, con toda seguridad, veríamos un conjunto de características y atributos que se repetiría una y otra vez. ¿Como interpretaríamos este conjunto de atributos comunes? Tenemos varias posibilidades. Una de ellas diría que son características que se han seleccionado recurrentemente porque

representan adaptaciones útiles. Otra diría que tales características reflejan propiedades de los organismos tan fácilmente encontradas en el proceso evolutivo que su aparición es prácticamente inevitable. Alternativamente, tales atributos recurrentes podrían deberse no a la selección sino por virtud de ser propiedades inherentes a la materia constituyente y a las leyes que la gobiernan. Tales propiedades, en opinión de Kauffman, son universales y ahistóricas. Son propiedades genéricas de los organismos autoorganizados y la selección tiene una capacidad muy limitada y modesta para desviar el curso evolutivo de esas propiedades inherentes. En pocas palabras, el mecanismo motor preponderante de la evolución sería no sólo las mutaciones al azar, que desde luego existen, sino la autoorganización ahistórica que actuaría en base a restricciones propias de la materia. Sobre estos dos mecanismos actuaría la selección natural. Nótese que he omitido la frase “evolución biológica” porque en principio, la autoorganización, como mecanismo evolutivo, actúa en todos los aspectos de la evolución en la naturaleza incluida la evolución química que ha dado origen a átomos y moléculas, que a su vez incluyen a los polímeros autoreplicantes constituyentes de la vida en su forma más primaria.

La autoorganización es un proceso característico de los sistemas complejos, es decir de un conjunto de elementos semejantes que interactúan para generar propiedades emergentes a escala global. Se trata de un orden emergente generado sin la intervención de un control central o de un plan predefinido, ya sea en el diseño estructural de los elementos o codificado en los mecanismos de interacción. Este nuevo orden se manifiesta generalmente como una ruptura espontánea de simetría, en la que existe formación de patrones espacio-temporales donde antes no los había, y por la posibilidad de conductas colectivas altamente organizadas, aún en la ausencia de diseños prefijados. Aparentemente, el requisito principal para su acción es que los sistemas sean termodinámicamente abiertos y por ello la autoorganización existe ahistóricamente en todos los confines del universo que, al estar aún en expansión, provee las condiciones energéticas necesarias para la evolución de la materia, incluida desde luego la materia viva.

Una de las propiedades genéricas de la vida, es la organización de su estructura multicomponente en redes de interacciones. Así trátense de los niveles macros como las interacciones entre especies en ecosistemas, individuos en comunidades, interacciones de competencia, de depredación o de cooperación; o bien interacciones micro como las reacciones metabólicas o la expresión de genes, todas estas interacciones ocurren en sistemas complejos interconectados que tienen el carácter

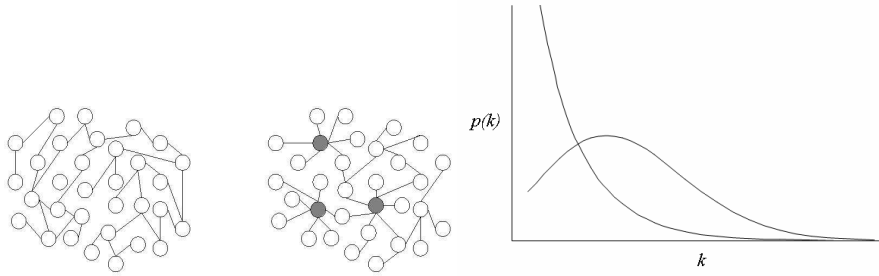


Figura 5: Existen muchos tipos de topologías posibles para las redes que representan interacciones entre componentes de un sistema. Un tipo son las llamadas redes aleatorias, en donde las conexiones entre nodos están dadas al azar, como se muestra en la figura de la izquierda. Para este tipo de red, la distribución estadística del número de conexiones $p(k)$ por nodo k es de tipo Poisson. En contraste, las redes libres de escala (centro) tienen los nodos conectados de tal forma que existe una abundancia de nodos con pocas conexiones y existen unos pocos nodos con muchas conexiones. La distribución estadística del número de conexiones $p(k)$ por nodo k es del tipo ley de potencias $p(k) = k^{-\mu}$. Siendo μ el exponente de escalamiento.

de redes; pero no son redes cualesquiera. Estas redes se conocen como redes complejas porque poseen una serie de propiedades en su topología que las hace especiales [13, 14]. Tales propiedades incluyen el que su topología no sea ni puramente aleatoria ni puramente regular, sino un estado intermedio entre estos dos extremos. Una ley de potencias describe la distribución de conexiones por nodo. Debido a esta última propiedad, estas redes especiales reciben el nombre de redes libres de escala pues carecen de una escala característica y por ello son fractales o autosimilares. Esta topología especial asegura, adicionalmente, que las redes complejas tengan propiedades de modularidad, robustez y redundancia al tiempo que optimizan los flujos de materias energía o información que fluye por ellas. En los albores del origen de la vida las interacciones de las primeras biomoléculas autoreplicantes y codificadoras debieron haberse dado en forma de redes complejas [15]. La evolución de la vida entonces se construyó basada en las posibilidades abiertas por la emergencia de la modularidad, dada por las existencia de redes jerárquicas entre componentes y niveles de complejidad creciente; pero siempre bajo la forma de redes de interacciones libres de escala.

La topología en redes complejas sería entonces una de las propiedades universales de la vida que veríamos aparecer una y otra vez si

pudiéramos realizar el experimento sugerido por Kauffman y sería también una propiedad universal cuya presencia sería una de las primeras contribuciones de una ciencia evolutiva verdaderamente predictiva: las formas vivas extraterrestres que pudieran localizarse en otros confines del universo obedecerán todas las leyes universales de la materia, por ejemplo obedecerían incuestionablemente la de gravitación de Newton, tanto como obedecerán la “ley” de la autoorganización en redes libres de escala.

Ahora debemos preguntarnos si la organización topológica en redes libres de escala es producto de la selección natural vía mutaciones al azar. Claramente no, de hecho claramente es un fracaso explicativo de este paradigma. Las redes complejas son sumamente resistentes al daño estructural debido a su redundancia y robustez. La existencia de tales redes va más allá de los ejemplos biológicos (que no son pocos) esta topología caracteriza a las redes sociales, tanto en humanos como en otros animales (delfines o primates), y existen en la estructura autoorganizada de las redes tecnológicas como es el caso de las redes mundiales de computadoras o telefonía. De hecho son tan universales que existen insospechadamente en sitios donde no se esperarían, como es el caso de las redes de relaciones que se forman entre los números enteros, lejos, muy lejos de la trasnochada idea del “gen egoísta”, donde más bien relucen algunas maravillas de la matemática como son la operación de la división aritmética y su vástago más fascinante: los números primos.

La autoorganización, como hemos visto, es un principio universal, una propiedad genérica en la evolución de la materia en todos sus estadios. Actúa de manera continua en todos los niveles de organización en el universo, desde su origen hasta la emergencia y evolución de la materia viva. Su acción rige de manera inevitable la emergencia de todas las estructuras colectivas en el universo, vivo o no. Una de sus acciones es producir estados metaestables vía un mecanismo altamente dinámico de retroalimentación no lineal que produce transiciones entre diferentes estados, de manera intermitente en secuencias tipo avalanchas caracterizadas espaciotemporalmente por leyes de potencias [16, 17]. Si, usted adivinó correctamente, las mismas que caracterizan a los procesos libres de escala de los fractales.

El mecanismo descrito anteriormente, actúa en una vasta variedad de procesos de la naturaleza, incluyendo a los organismos vivos. Su acción es conocida en la actividad eléctrica del cerebro [18], en la posible dinámica de sucesión en bosques [19] y recientemente se ha sugerido como parte integral del proceso evolutivo [20], desde una explicación de las extinciones en masa, de los procesos de especiación en avalan-

cha (como la explosión cámbrica), de los estados de estasis (equilibrio punteado) [21] y de manera más osada, la especulación teórica de que este mecanismo actúa en concierto con la selección natural y donde, de hecho, la selección natural sería no más ni menos que un proceso fractal[22]. Este mecanismo autoorganizado se conoce con el nombre de criticalidad autoorganizada o SOC por sus siglas en inglés [23].

SOC es un concepto introducido en los años 80 para explicar las fluctuaciones temporales conocidas como ruido rosa, ruido $1/f$ o ruido f^α con $\alpha = -1$. Estas fluctuaciones representan el típico comportamiento dinámico de un sistema en un estado situado en la vecindad de una transición de fase (estado crítico). En algunos casos tal transición de fase es del tipo orden-desorden donde los sistemas que la exhiben se ordenan espontáneamente porque se alcanzan correlaciones espaciales en distancias que alcanzan a todo el dominio del sistema. En estos casos es común llamar al estado, en las vecindades de la transición, como el *borde del caos*. La evolución temporal de un sistema puede guiarlo de manera autoorganizada hacia el borde del caos, en esos casos coincide con el concepto SOC y es una idea extremadamente importante para explorar potencialmente dinámicas evolutivas en biología. Pero... ¿qué hay de las matemáticas?

3. Números del montón

En matemáticas, no es común hablar de fenomenología de los números; pero una nueva tendencia en esta ciencia parece sugerir lo contrario [24]. ¿Pueden las matemáticas verse como un fenómeno más de la naturaleza y por ello regidas por sus leyes, entre ellas las leyes de la física?, ¿existiría la evolución temporal hacia estados autoorganizados y la termodinámica de transiciones de fase en sistemas de números y operaciones aritméticas? Bartolomé Luque y colegas parecen tener una opinión al respecto [25].

Las operaciones aritméticas son a primera vista simples. Las aprenden los niños en la escuela primaria y existen evidencias de que los primates tienen la capacidad de realizarlas también [26], aspecto que comparten con pollos y perros [27] sin despreciar a las abejas que pueden perfectamente contar números [28]. En chimpancés existe, sin duda la noción de proporcionalidad numérica [29]; pero no está claro aún si ello implica la noción de divisibilidad como operación aritmética [30].

Como sea, la “simple” división aritmética implica conceptos matemáticos nada simples como el infinito (∞), divergencia o singularidad: $\frac{1}{0}$ equivalente a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$. Pero la noción de número primo es una de

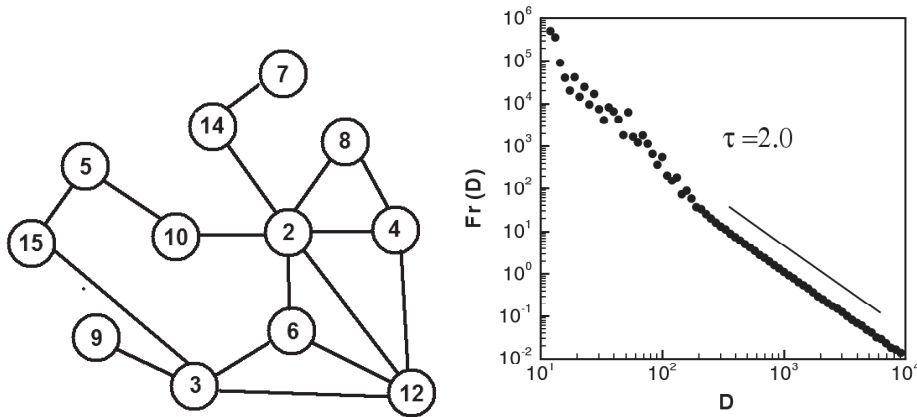


Figura 6: La red de interacciones entre números enteros n (en la figura de la izquierda se muestra para el caso $n \leq 15$, dada por la existencia de divisores comunes, resulta ser una red libre de escala. En la figura de la derecha se muestra la distribución estadística de tal red, donde D es el número de divisores de cada número en el intervalo $[2, 10^6]$. La distribución es una ley de potencias $P(D) = D^{-\tau}$ con exponente de escalamiento $\tau = 2$.

las más misteriosas y fascinantes de toda la historia de las matemáticas, cortesía de la división aritmética. Recordemos que un número primo es aquel que es sólo divisible por sí mismo o por la unidad. Prácticamente todos los grandes matemáticos a lo largo de la historia de la tradición matemática occidental han abordado de distintas maneras a los números primos y han creado una cantidad de conjeturas, algunas centenarias que permanecen abiertas hasta el día de hoy, como es el caso de las conjeturas de Goldbach y la de Riemann.

La conjetura de Goldbach, una de las más antiguas en teoría de números dice que cada entero par mayor que dos puede escribirse como la suma de dos números primos. Por su parte, la conjetura de Riemann dice que los ceros de la función zeta de Riemann pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. Para agregar más al misterio, la función zeta de Riemann tiene, a su vez, conexiones inesperadas con la física del caos cuántico [31]. Tal es la obsesión de los matemáticos con la hipótesis de Riemann que el Instituto Clay ofrece un millón de dólares como premio a quien logre probarla fehacientemente [32].

Los números primos pueden generarse con métodos ideados desde los tiempos de la Grecia antigua, primero por Euclides y posteriormente por Eratóstenes, a quien se le atribuye el método conocido como “Criba de Eratóstenes” y que es usado para discriminar un número candidato

contra una serie de pruebas para determinar si es un número primo. Actualmente los números primos más grandes conocidos se obtienen con algoritmos sumamente complicados que se ejecutan en las supercomputadoras más veloces disponibles.

Otra manera de obtenerlos, un tanto ineficiente, es utilizando métodos estocásticos; pero estos métodos pueden agregar aspectos interesantes a la fenomenología de los números primos. Empleando un algoritmo estocástico basado en el concepto de química algorítmica, que es el mismo concepto usado para explicar la evolución química que dio origen a las primeras biomoléculas abióticas [3, 33], Luque y sus colegas [34] demostraron que en el proceso iterado de divisiones estocásticas entre números enteros (sustituyendo las moléculas reactivas por números divisibles) se presenta una transición de fase continua, que separa una fase donde el conjunto inicial de números enteros se reduce a números primos, de otra fase donde se obtiene un estado congelado con densidad muy baja de primos. Esta transición de fase tendría propiedades interesantes adicionales desde el punto de vista de la complejidad algorítmica, pues el problema pertenecería a la clase universal de problemas *NP* (no-polinomial)[35].

¿Recuerdan las redes libres de escala que caracterizan universalmente a las redes de interacciones biológicas? ¿Recuerdan que se dijo que esta topología sería una de las propiedades universales que veríamos aparecer una y otra vez si pudiéramos atestiguar el origen y evolución de la vida miles de veces? ¿Les sorprendería ahora saber que la red de conexiones que existen entre los número enteros y sus divisores exactos es precisamente de este tipo? ¿Qué otras sorpresas nos esperan al estudiar la fenomenología de los números enteros vistos como sistemas complejos interactuantes?

La red libre de escala de los números enteros induce un proceso de criticalidad autoorganizada (SOC) sobre el proceso de divisiones iteradas, en un proceso que ha sido estudiando el llamado “modelo de divisiones” [36]. Pensemos en un sistema formado por un montón de números enteros (*conjunto*, claro, en una expresión menos coloquial) del cual se pueden sustraer números consecutivos para guardarlos en un otro montón. La condición para permanecer en el segundo montón es que ningún número de los ahí existentes sea mutuamente divisible con los demás (recibe el nombre de conjunto primitivo). La llegada de otros números (no repetidos) a este segundo montón puede implicar la existencia de divisiones en avalanchas, las cuales... ¡tienen una distribución de tamaños dada por una ley de potencias! El tamaño del segundo montón estaría dado por la suma de los números primos ahí acumulados

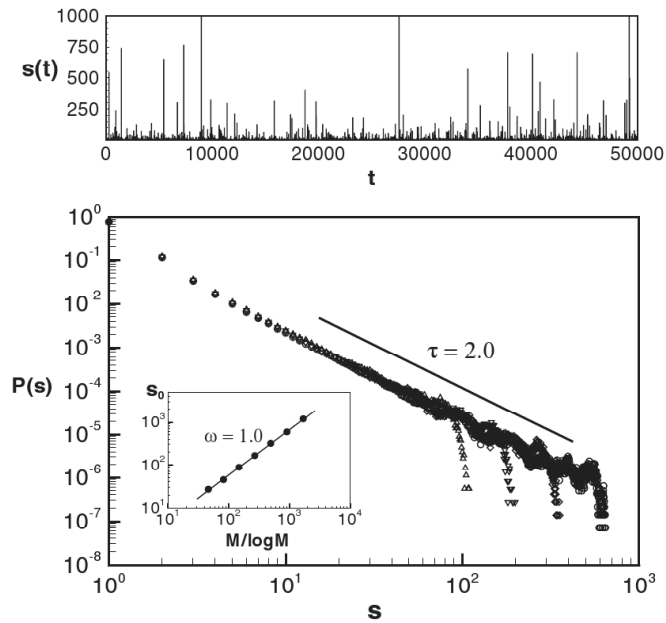


Figura 7: Arriba: Evolución temporal del modelo de divisiones mostrando la secuencia de avalanchas de divisiones cada que un número recién llegado al conjunto primitivo encuentra otros números con divisores comunes. Abajo: Distribución de probabilidad $P(s)$ de que una avalancha de tamaño s ocurra en el sistema, para diferentes tamaños del sistema: $M = 2^{10}$ triángulos, $M = 2^{11}$ triángulos invertidos, $M = 2^{12}$ diamantes, $M = 2^{13}$ círculos. En todos los casos, el escalamiento es una ley de potencias con decaimiento exponencial en la cola (debido al tamaño finito del sistema). En el recuadro se muestra el escalamiento entre el tamaño del sistema y el valor del corte del decaimiento exponencial, mostrando -a su vez- una ley de potencias, indicativo de un fenómeno crítico.

permanentemente, más una cantidad variable de números no primos. Lo interesante de un modelo estocástico así, es que estas proporciones son perfectamente predecibles. La fenomenología autoorganizada de este caso pertenece al mundo físico; pero es exactamente soluble echando mano de los elementos de la Teoría de Números. Este ejemplo SOC de números enteros es el ejemplo más simple de todos los modelos críticamente autoorganizados que se hayan propuesto hasta el momento [36]. Constituye por lo tanto, un caso simple que podría motivar el estudio de fenómenos críticos autoorganizados de otro tipo en la naturaleza, que tengan dinámicas evolutivas hacia estados metaestables, los cuales -por cierto- son una tendencia generalizada en la evolución del universo.

Referencias

- [1] I.S. Shklovski. Universo, vida, intelecto. Moscú: Edit. Mir, 1977.
- [2] I. Prigogine e I. Stengers. Order Out of Chaos: Man's New Dialogue With Nature. Flamingo books, London 1985.
- [3] W. Fontana y L.W. Buss. What would be conserved if "the tape were played twice"? Proc. Natl. Acad. Sci. USA 91, 1994.
- [4] M. A. Nowak y H. Ohtsuki. Prevolutionary dynamics and the origin of evolution. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 105:14924-14927, 2008.
- [5] M.T. Beltrán, et al. First Detection of Glycolaldehyde Outside the Galactic Center. The Astrophysical Journal Letters, Volume 690, Issue 2, pp.L93-L96, 2009.
- [6] A. Oparin. El origen de la vida. 11a ed. Fondo de Cultura Popular, México, 1974.
- [7] S.W. Fox, K. Harada y J. Kendrick, Production of spherules from synthetic proteinoid and hot water. Science 129, pp. 1221-1223, 1959.
- [8] J.W. Schopf y B.M. Packer. Early Archean (3.3-billion to 3.5-billion-year-old) microfossils from Warrawoona Group, Australia. Science. 1987 Jul 3;237:70-3.
- [9] R. Dawkins, El gen egoísta. Barcelona, Labor, 1979.
- [10] S. Rose. Lifelines: life beyond the gene. Oxford Univ. Press, 2003.

- [11] S.A. Kauffman. Self-organization, selective adaptation and its limits: a new pattern of inference in evolution and development. In D.J. Depew and B.H. Weber (eds) *Evolution at a Crossroads: The New Biology and the New Philosophy of Science*. MIT Press 1985.
- [12] B.C. Goodwin. *How the Leopard Changed its Spots: The Evolution of Complexity*, Scribner, 1994.
- [13] S.H. Strogatz. *SYNC: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion, 2003.
- [14] A-L. Barabasi. *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means*. Plume, 2003.
- [15] Zoltán, N. Oltvai y Albert-László Barabási. Life's Complexity Pyramid. *Science* 25 October 2002: Vol. 298. no. 5594, pp. 763 - 764.
- [16] P. Bak. *How Nature Works: The Science of Self-Organised Criticality*. New York, NY: Copernicus Press, 1996.
- [17] H.J. Jensen. *Self-Organized Criticality: emergent complex behaviour in physical and biological systems*. Cambridge University Press, 1998.
- [18] Y. Qiu-Ying et al. Self-organized Criticality in Hierarchical Brain Network. *Commun. Theor. Phys.* 50 1189-1192, 2008.
- [19] J.C. Sprott et al. Self-organized criticality in forest-landscape evolution. *Physics Letters A* 297:267-271, 2002.
- [20] R.V. Solé y J. Bascompte. Are Critical Phenomena Relevant to Large-Scale Evolution? *Proc. R. Soc. Lond. B* vol. 263 no. 1367 161-168, 1996.
- [21] P. Bak y S. Boettcher. Self-organized criticality and punctuated equilibria. *Physica D: Nonlinear Phenomena* Volume 107, Issues 2-4, pp.143-150, 1997.
- [22] J.D. Halley y D.A. Winkler. Critical-like self-organization and natural selection: Two facets of a single evolutionary process? *Biosystems* Volume 92, Issue 2, May 2008, Pages 148-158.
- [23] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.* 59, 381 - 384, 1987.

- [24] J.M. Borwein y D.H. Bailey. Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. AK Peters, 2003.
- [25] L. Lacasa, B. Luque y O. Miramontes. Complex Systems, numbers and Number Theory. In: Reviews of Nonlinear Dynamics and Complexity III, H.G. Schuster (ed). Wiley (en prensa).
- [26] J.F. Cantlon y E.M. Brannon (2007) Basic math in monkeys and college students. PLoS Biol 5(12): e328. doi:10.1371/journal.pbio.0050328.
- [27] R. Rugani et al. Arithmetic in newborn chicks. Proceedings of the Royal Society B. April 1, 2009, doi: 10.1098/rspb.2009.0044.
- [28] D. Burr y J. Ross A Visual Sense of Number. Current Biology, Volume 18, Issue 6, 425-428, 25 March 2008.
- [29] G. Woodruff y D. Premack. Primitive mathematical concepts in the chimpanzee: proportionality and numerosity. Nature 293, 568-570 (15 October 1981).
- [30] M. Tomasello y J. Call. Primate Cognition. Oxford University Press 1997.
- [31] M.V. Berry, *Riemann zeta function: A model for quantum chaos?* In Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics, T.H. Selegman and H. Nishioka, eds., Springer-Verlag, Berlin-New York, 1986.
- [32] <http://www.claymath.org/millennium/>.
- [33] P. Dittrich, J. Ziegler y W. Banzhaf (2001) Artificial Chemistries - A Review Artificial Life, 7(3):225-275.
- [34] B. Luque, L. Lacasa y O. Miramontes Phase transition in a stochastic prime number generator. Phys. Rev. E 76, 010103(R) 2007 (Rapid Communication).
- [35] L. Lacasa, B. Luque y O. Miramontes Phase transition and computational complexity in a prime number generator. New Journal of Physics 10, 023009, 2008.
- [36] B Luque, O. Miramontes y L Lacasa Number theoretic example of scale-free topology inducing self-organized criticality. Physical Review Letters 101(15),158702, 2008.