

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NO LINEAL Y LOS SISTEMAS COMPLEJOS
Escuela de Verano del IFUNAM, agosto 2005
Denis Boyer, Instituto de Física, UNAM

Este curso presenta una breve introducción a los fenómenos no lineales. La Física No lineal empezó a atraer el interés de muchos investigadores al final de los años sesenta, conoció avances conceptuales y un auge espectacular durante los ochenta. Sin embargo, varios matemáticos, físicos, neurólogos y meteorólogos (Poincaré, van der Pol, Arnold, Nagumo, Kuramoto, Lorentz, para nombrar a algunos) han hecho contribuciones pioneras mayores (algunas aisladas y reconocidas de manera tardía) desde el final del siglo XIX hasta los años sesenta. Interdisciplinaria desde sus principios, la Física No lineal (junto con su “hijo espiritual”, los Sistemas Complejos) sigue siendo tema de investigación activa hoy en día, aunque el enfoque ha cambiado notablemente en los diez últimos años. Las fronteras entre las varias disciplinas se han hecho menos nítidas con el tiempo, más entrelazadas. La cantidad de investigaciones aplicadas a la biología, en particular, está en constante crecimiento. Una de las preguntas actuales más grandes es saber si los conceptos físicos bien establecidos que aprendimos durante las décadas pasadas pueden permitir una descripción cuantitativa de fenómenos biológicos, sociales o económicos, cuya complejidad es un reto para el entendimiento y la creación de modelos.

1 El marco de los sistemas fuera de equilibrio

Por la gran cantidad de temas relacionados con ella es difícil (o imposible) dar una definición precisa y concisa de la Física No lineal. Un punto de partida usual es el marco de los sistemas dinámicos y de las ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, quisiera empezar por un lado más físico. Muchos de los problemas expuestos a continuación tienen en común dos propiedades importantes: (i) involucran sistemas compuestos de un número enorme de elementos que interactúan unos con otros, es decir, son sistemas con muchos grados de libertad; (ii) estos sistemas **no** se encuentran en el equilibrio termodinámico.

Esa segunda propiedad tiene consecuencias importantes. La mayor parte de nuestro conocimiento de la Termodinámica Estadística se limita a los procesos de equilibrio. Consideremos el ejemplo de la Figura 1. Un sistema aislado está subdividido en dos compartimientos que pueden comunicar, y contiene inicialmente un gas en uno de ellos. El sistema tiende rápidamente hacia un estado de equilibrio: el segundo compartimiento se llena para que la densidad (o cualquier cantidad termodinámica intensiva) quede espacialmente uniforme en los dos compartimientos. Esa propiedad deriva de la segunda ley de la termodinámica que indica que la entropía de un sistema aislado debe crecer a lo largo de su evolución. Cuando el sistema alcanza un estado de equilibrio, la entropía alcanza un máximo. Recordamos que la entropía está estrechamente relacionada con la noción de *desorden*. La configuración con los compartimientos bien mezclados es más desordenada que la inicial. Debido a que es más uniforme: no hay diferencia de estado o de estructura del gas entre las partes derecha e izquierda.

1.1 Sistemas forzados

Ahora consideramos un ejemplo opuesto al precedente en cuanto a su complejidad: un organismo vivo. Un sistema vivo debe ser dividido en muchísimos “compartimientos”, típicamente en células, que a su vez forman órganos separados y bien definidos. Para que cumplan con sus funciones fisiológicas específicas es vital que las células mantengan su estructura y forma. Es

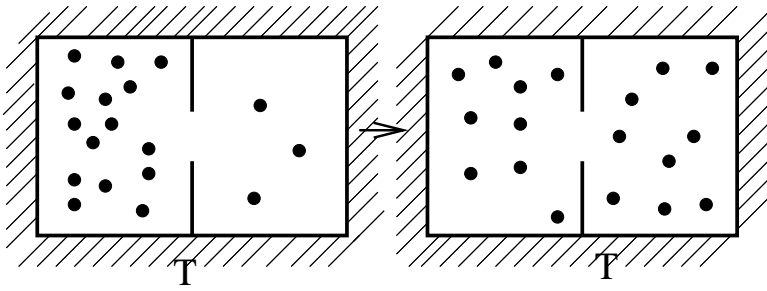


Figure 1: Un sistema aislado evoluciona hacia un estado de equilibrio donde todas las variables termodinámicas (temperatura, concentración ...) son uniformes en todo el espacio.

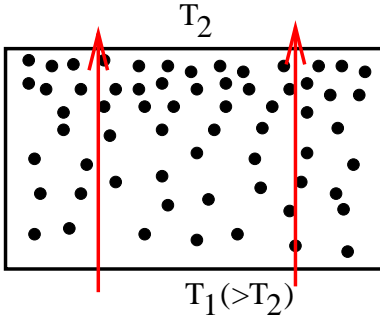


Figure 2: Sistema no aislado, con un flujo de calor vertical hacia arriba $\vec{J} \neq 0$ producido por una diferencia de temperatura ($T_1 \neq T_2$) entre las paredes inferior y superior. El sistema se encuentra cerca del equilibrio. Se establece un gradiente de temperatura $\kappa \vec{\nabla} T = -\vec{J}$ en todo el sistema.

decir, que su contenido (núcleo, cito-plasma, proteínas, mensajeros, ADN..) no se mezcle con lo de sus vecinos como en el caso de la Figura 1. Sin embargo, necesitan seguir comunicando para intercambiar materia y para organizarse a escalas más grandes, por ejemplo al nivel de un órgano. El desorden es el enemigo de los organismos vivos. Por el contrario, la vida requiere especialización, división espacial, ciclos temporales, propiedades ausentes en el ejemplo de la Figura 1. Entonces surge una paradoja: si la segunda Ley de la termodinámica nos dice que a lo largo del tiempo crece el desorden de un sistema, ¿cómo hizo la Naturaleza para seguir el camino inverso? es decir crear tanto *orden, formas y estructuras* a partir de una “sopa” original. La respuesta formulada por Prigogine (premio Nobel de Química) en los años cuarenta-cincuenta, es conceptualmente simple: estos sistemas “complejos” no están aislados, pero se encuentran fuera del equilibrio termodinámico. Por lo tanto los argumentos de equilibrio no aplican en este caso.

Los sistemas fuera de equilibrio reciben energía o materia del exterior. En este sentido, se dice a menudo que están *forzados*. La Figura 2 muestra un ejemplo. En vez de estar en contacto con un termostato de temperatura uniforme como el de la Figura 1, el fluido está en contacto con una pared de abajo más caliente que la de arriba. El sistema recibe calor desde abajo y lo evacúa (o disipa) por la parte superior. Existe entonces un *flujo* de calor \vec{J} que atraviesa el sistema de abajo hacia arriba: para que este flujo exista hay que mantener las temperaturas diferentes de las paredes, y eso cuesta energía. No importa, la energía sobra en el universo; recibimos mucha energía del sol. Contrariamente al caso anterior, el estado estacionario que se establece entre las dos paredes ya no es uniforme espacialmente. El sistema responde al flujo

externo impuesto, estableciendo *gradientes* espaciales o heterogeneidades: la parte superior, más fría, es más densa que la parte inferior. Suponemos ahora que el flujo \vec{J} es análogo a una “fuerza”, y que el gradiente de temperatura $\vec{\nabla}T$ es análogo a un “desplazamiento” (o respuesta) fuera de un punto de equilibrio ideal ($\vec{\nabla}T = \vec{0}$). A partir de lo anterior, nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Hay principios generales que nos permitan establecer una relación entre “fuerzas” y “desplazamientos”?

La respuesta es no. No existe una teoría general. Los sistemas que son sacados fuera del equilibrio se tienen que analizar caso por caso. De ahí surge la gran diversidad (se podría hablar de “zoología”) y la complejidad de los comportamientos que se pueden observar. Sin embargo, unos casos son simples: si el sistema no está muy lejos del equilibrio (el flujo $|\vec{J}|$ es pequeño), la relación entre fuerza y desplazamiento suele ser *lineal*, es decir, podemos escribir $\vec{J} = -D\vec{\nabla}T$ para el ejemplo de la Figura 2. Esa relación significa que el sistema se aleja del equilibrio ($\vec{\nabla}T \neq 0$) de manera proporcional a los flujos externos (\vec{J}) impuestos. La constante D es una constante fenomenológica de difusión del calor, una especie de susceptibilidad. En una analogía mecánica, α sería la constante de un resorte, \vec{J} la fuerza y $\vec{\nabla}T$ el desplazamiento producido por esa fuerza. La relación anterior es también conocida como la ley de Fick, donde el signo menos indica que el calor fluye de la región más caliente hacia la más fría.

1.2 La parte temporal

Hasta ahora hemos hablado de estados estacionarios y no hemos incluido el tiempo de manera explícita en nuestra descripción. Sin embargo, la dinámica constituye a menudo la parte más interesante de un problema. En muchos casos, incluir el tiempo en un modelo es incluso la única manera de entender un fenómeno natural o de interpretar un experimento. Es un punto clave en todas las secciones de este curso. En el ejemplo anterior podemos utilizar el principio sencillo de conservación del calor a nivel local, es decir una relación *exacta* de continuidad: $c_T \partial_t T + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, donde c_T es la capacidad calorífica del gas y $\partial_t = \partial/\partial t$ el operador de la derivada parcial con respecto al tiempo. Combinando con la ley de Fick nos lleva a una ecuación diferencial con derivadas parciales para la temperatura $T(\vec{r}, t)$ en el punto \vec{r} y al instante t ,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T, \quad (1)$$

donde $\kappa = D/c_T$ es la difusividad térmica. Esa ecuación es la famosa ecuación de la difusión, que se encuentra en numerosas áreas de la Física. Es lineal y relativamente fácil de resolver para todo t a partir de una condición inicial. El perfil de temperatura estacionario ($\partial_t T = 0$) a lo largo del eje vertical, para el ejemplo de la Figura 2 se puede obtener aplicando las condiciones de bordes a las paredes. En la ausencia de un flujo externo, esa ecuación describe la relajación hacia un estado uniforme, $T(\vec{r}, t = \infty) = \text{constante}$, de un sistema inicialmente heterogeneo (por ejemplo, la densidad en la Figura 1) ¹.

¹La ecuación (1) se puede escribir de forma alterna como $\partial_t T(\vec{r}, t) = -\delta F/\delta T(\vec{r}, t)$, donde F es un funcional llamado de Lyapunov, dado en este ejemplo por $F(t) = (\kappa/2) \int (\vec{\nabla}T)^2 d\vec{r}$; δ representa la derivada funcional de Fréchet. F es análogo a una “energía” total del sistema, y su derivada funcional a una fuerza a la posición \vec{r} . Para un sistema sin condiciones de fronteras particulares, se puede mostrar que $dF/dt \leq 0$, es decir, el sistema es disipativo. Cuando $t \rightarrow \infty$, la “energía” es minimal, y vemos que este mínimo corresponde a $F = 0$, o $T = \text{constante}$.

1.3 Interacciones espaciales en sistemas extendidos

Antes de seguir adelante vale la pena resaltar un aspecto general muy importante: las ecuaciones diferenciales con derivadas parciales representan una manera muy cómoda de describir, en el límite continuo, sistemas espacialmente extensos compuestos de muchos elementos en posiciones fijas y que interactúan entre ellos. El operador Laplaciano ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ en dos dimensiones espaciales) que aparece en la Ec.(1) proviene directamente de la interacción entre un elemento infinitesimal de volumen del gas (centrado en la posición \vec{r}) con los elementos infinitesimales vecinos que lo rodean. Es posible mostrar (ver la nota de pie de pagina 1) que el Laplaciano de la Ec. (1) es análogo a una fuerza que intenta llevar, localmente, la temperatura del elemento de volumen centrado en \vec{r} hacia un valor de equilibrio. Esa interacción tiene dos propiedades importantes: (i) es de tipo *atractiva*, es decir, tiende a uniformizar la temperatura entre elementos de volumen vecinos para reducir los gradientes conforme pasa el tiempo; (ii) es *de corto alcance*: el elemento de volumen centrado en \vec{r} interactúa únicamente con sus vecinos más cercanos. Esa última propiedad se puede averiguar discretizando el operador Laplaciano, con los elementos del sistema ubicados en los nodos de una red cuadrada regular.

Las propiedades (i) y (ii) del operador de Laplace son muy generales y no solamente se utilizan para problemas de difusión. Muchísimos medios no lineales más complicados (ver más adelante el ejemplo de los "Medios excitables", con aplicaciones a propagación espontánea de ondas en el tejido cardíaco o en redes de neuronas) contienen una parte de difusión que tiene el papel crucial de hacer interactuar elementos vecinos (por ejemplo células). Esa interacción puede permitir fenómenos poco intuitivos (e imposible de observar con la ecuación de difusión), como el de sincronización espacio-temporal, por ejemplo. Entonces, para que un orden de largo alcance se establezca en un sistema compuesto de muchos elementos pequeños, a menudo es suficiente que estos elementos interactúen con fuerzas de corto alcance entre vecinos.

Notemos que el término de interacción espacial de tipo Laplace es lineal. Es muy común que los términos que describen la parte espacial de un sistema compuesto de muchos elementos sean simplemente lineales. La complejidad de los patrones espacio-temporales que se pueden observar proviene generalmente del acoplamiento entre esa parte espacial y la dinámica no lineal intrínseca de las partes elementales individuales que constituyen el sistema.

1.4 Estructuras disipativas

Las cosas se ponen más interesantes si seguimos aumentando la diferencia de temperatura entre las paredes inferior y superior. El sistema sufre un cambio drástico de estado que ocurre a una cierta diferencia de temperatura. Aparece un estado de convección caracterizado por la presencia de heterogeneidades de densidad/temperatura *a lo largo del eje horizontal*, ver Figura 3a. Un fenómeno parecido ocurre cuando calentamos agua en una olla: el fluido inicialmente quieto se pone en movimiento. Este fenómeno se conoce como convección de Rayleigh-Bénard. Si hacemos un experimento cuidadoso, con diferencias de temperatura bien controladas, podemos observar estructuras regulares y periódicas. (Tarea para la casa: cocer arroz al vapor con poca agua y observar arreglos hexagonales de hoyos.) Esas estructuras se llaman a veces "celulares": son como pequeñas regiones de heterogeneidades que juntas forman un patrón espacial organizado, parecido a los nidos de las abejas o a las células de un organismo.

Estas formas periódicas son *estructuras disipativas*: El sistema fluido responde al flujo de calor que lo atraviesa por la formación espontánea de estructuras que permiten disipar el calor

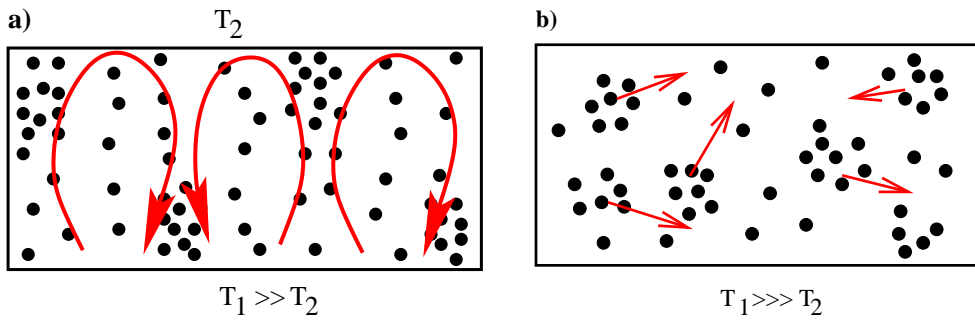


Figure 3: **a)** Una estructura disipativa periódica aparece en el mismo sistema que el anterior pero forzado con un flujo mucho mayor ($T_1 \gg T_2$). Las leyes de la termodinámica de equilibrio no pueden explicar este fenómeno. **b)** Más lejos aún del equilibrio, estado de convección turbulenta: el estado ordenado de la Figura a) se rompe y la dinámica de las heterogeneidades de densidad (o temperatura) es caótica.

hacia arriba de manera más eficiente que por conducción molecular. Ya no podemos utilizar solamente la ecuación de difusión (1) para describir el estado del sistema. Una descripción completa requiere considerar las ecuaciones de la hidrodinámica, que son muy difíciles de resolver. El fenómeno de convección se puede entender cualitativamente en el hecho de que un elemento de fluido en la parte superior (Fig. 2) es más denso y tiende a hundirse por fuerzas de flotación debido al campo gravitacional. Cuando el fluido llega abajo se vuelve a calentar y se pone más ligero, lo que lo hace ascender, y así sucesivamente.

Una de las propiedades más notable (y poco intuitiva) de las estructuras disipativas periódicas es que aparecen en sistemas inicialmente homogéneos, en los cuales no se sospecharía que se pueda generar un orden de cualquier tipo. En este sentido, se pueden también calificar de “estructuras emergentes”. En nuestro ejemplo, la temperatura T_1 (y T_2) es siempre la misma en cada punto de la pared y el fluido inicial es uniforme; sin embargo, el estado que se establece en el sistema entre las dos paredes no es invariante por translación a lo largo del eje horizontal. Las fuerzas impuestas son espacialmente uniformes (como el fluido inicialmente), pero la respuesta del sistema no es uniforme. Obviamente, solamente un fenómeno no lineal puede dar lugar a tal comportamiento. El estado de convección rompe la simetría de invarianza por translación. El concepto de rompimiento de simetría juega también un papel central en la teoría de las transiciones de fases y los fenómenos críticos. Algo muy parecido sucede aquí en un nivel dinámico. El cambio de un estado al otro acompañado de un rompimiento de simetrías se llama una bifurcación. Veremos en la próxima sección que la introducción del tiempo permite una descripción fenomenológica sencilla de las bifurcaciones.

La Figura 3b muestra de manera esquemática lo que puede pasar si nos alejamos aún más del equilibrio incrementando T_1 . Las estructuras disipativas anteriores se desestabilizan a su vez y dan lugar a un estado turbulento, dominado por un comportamiento caótico de las heterogeneidades de densidad. Esto lo sabe cualquier cocinero que pone agua a calentar. Este estado es menos ordenado que el anterior y de descripción mucho más compleja. En este caso, cualquier propiedad se tiene que analizar de manera estadística. Cuando se incrementan las fuerzas, la complejidad de los comportamientos crece: es una propiedad de los sistemas forzados en general.

La convección es un paradigma de sistema forzado lejos del equilibrio termodinámico. Los conceptos e ideas que acabamos de mencionar no solamente se encuentran en la hidrodinámica

y la ciencia de la atmósfera, sino también son relevantes en muchos otros contextos: los sistemas mecánicos forzados, la auto-organización en la materia condensada, la morfogénesis en biología, la descripción de dinámica de población en sistemas ecológicos, entre otros (ver Sección 3).

2 Sistemas dinámicos de baja dimensión

En esta sección, abordamos los fenómenos no lineales desde un punto de vista diferente, más matemático. Dejamos (por un tiempo) un poco de lado la descripción detallada de los sistemas físicos, que a menudo desaniman por su complejidad. La ventaja de un enfoque matemático es la de proporcionar respuestas precisas para una serie de problemas simplificados. Si se eligen bien estos *modelos reducidos*, serán suficientemente generales y las respuestas susceptibles de capturar propiedades importantes en varios sistemas reales.

De manera formal, se puede definir un sistema dinámico de N dimensiones por un conjunto de variables $s_i(t)$ dependiendo del tiempo ($i = 1, \dots, N$), y cuya evolución temporal está dada por N ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{s}_i(t) = f_i(s_1(t), \dots, s_N(t)), \quad (2)$$

con N funciones f_i , dependiendo del problema considerado. (Supondremos a continuación que las f_i no dependen explícitamente del tiempo.) La evolución del sistema depende únicamente de la condición inicial. Cualquier ecuación diferencial con derivadas parciales se puede escribir de esa forma en el límite $N \rightarrow \infty$, donde i representa la posición y s un campo de interés (por ejemplo, la temperatura). Por ejemplo, la ecuación de la difusión (1), en una dimensión espacial, se puede escribir tomando $f_i = s_{i+1} + s_{i-1} - 2s_i$, que es una forma discreta del Laplaciano (derivada segunda).

Nótese que si los f_i son funciones lineales de sus argumentos, los tipos de comportamientos posibles para los $x_i(t)$ son bastante limitados, ya que solamente pueden crecer, decaer exponencialmente u oscilar de manera sinusoidal. Cualquier otro tipo de evolución requiere no linealidades.

En esta sección consideramos los casos de sistemas dinámicos de baja dimensión, con $N = 1$ o $N = 2$, es decir son problemas donde la dependencia espacial no es explícita ($\partial/\partial x = 0$).

2.1 Bifurcaciones y sistemas disipativos

Regresamos al problema de la convección con un modelo reducido de baja dimensión. Primero, suponemos que el sistema ha alcanzado un estado estacionario, donde los diferentes campos (temperatura, densidad, velocidad) no dependen del tiempo. Ubicamos (con la mente) un termómetro a distancia media entre las paredes de arriba y de abajo. Si movemos el termómetro horizontalmente podemos observar dos tipos de resultados. En el régimen conductivo (sin convección), por simetría, la temperatura queda constante en el plano. En el estado convectivo, sin embargo, los experimentos muestran que la temperatura depende de la posición y es una función periódica debido a la presencia de las estructuras celulares. Podemos escribir en primera aproximación esas variaciones de temperatura como:

$$\delta T(x, t) = a(t)e^{ikx} + c.c., \quad (3)$$

donde $2\pi/k$ es la periodicidad espacial de las estructuras disipativas y x una coordenada a lo largo del eje horizontal; la parte *c.c.* representa el complejo conjugado del primer término (para que δT sea real). La amplitud a es función del tiempo *a priori* y es compleja, dado la forma del ansatz (3). ¿Podemos ahora encontrar una ecuación diferencial simple para la amplitud $a(t)$, que tenga soluciones estacionarias $a(t) = 0$ (conducción), y $a(t) = cst$ (convección), dependiendo de la diferencia de temperatura de las paredes? Para eso hay que definir un parámetro de control *adimensional* $\epsilon = (T_1 - T_1^{(c)})/T_1^{(c)}$, donde $T_1^{(c)}$ es el valor umbral de la temperatura de la pared inferior que produce convección. Si $\epsilon < 0$, no hay convección; si $\epsilon > 0$, la hay. Podemos escribir

$$\frac{da}{dt} = \epsilon a + \dots \quad (4)$$

Si guardamos el primer término del lado derecho solamente, entonces la solución es $a(t) = a_0 \exp(\epsilon t)$. (Notar que el tiempo t es adimensional.) Si $\epsilon < 0$, las soluciones tienden todas hacia $a = 0$, como requerido. Si $\epsilon > 0$, las soluciones crecen exponencialmente y divergen, cosa que no es aceptable físicamente. No hay otra alternativa que la de saturar este crecimiento a cierto valor asintótico $a(t = \infty)$ por la adición de un término no lineal de signo opuesto. Escribimos el segundo término como:

$$\frac{da}{dt} = \epsilon a - g|a|^2 a, \quad (5)$$

donde g es una constante que podemos igualar a 1 sin perder generalidad. La ecuación (5) tiene $a = 0$ como solución para todo valor de ϵ . Para $\epsilon > 0$, la ecuación tiene además otro conjunto de soluciones estacionarias ($da/dt = 0$), “no triviales” (como requerido), correspondiendo al estado convectivo: $|a^*| = \sqrt{\epsilon}$, o sea $a^* = \sqrt{\epsilon} \exp(-i\varphi)$, con φ una fase (real) arbitraria.

La ecuación (5) llama a varios comentarios.

a) ¿Por qué un término cúbico para la no linealidad? Argumentos de simetría nos proporcionan una respuesta. Si a^* es solución de (5), entonces $a^* \exp(i\phi)$ (con ϕ un real arbitrario) también debería ser solución del problema. Eso se debe al hecho de que multiplicar a^* por $\exp(i\phi)$, es equivalente a trasladar el fluido (o todo el sistema físico de estudio) de una longitud $-\phi/k$ a lo largo del eje x (ver ecuación (3)). En caso de que se pueda desprestigiar la influencia de las paredes laterales que contienen el fluido (por ejemplo, si el sistema es muy extendido), se podría elegir cualquier punto para el origen del eje x . Entonces, cualquier traslación de una solución existente también debe ser solución del problema obviamente. Términos no lineales como $-a^2$ o $-a^3$ no son por lo tanto aceptables en (5), porque no respetan esa invarianza por traslación pero sí un término como $-|a|^n a$.

b) ¿Cuál es la *estabilidad* de las soluciones encontradas? Conocer las soluciones estacionarias o *puntos fijos* de (5) no basta. En cualquier problema de dinámica es muy (¿o más?) importante determinar también (cuando se puede) la estabilidad de esas soluciones. La estabilidad de una solución se estudia *perturbándola*. En este caso, suponemos que a^* es un punto fijo de un problema dinámico y queremos conocer la evolución temporal de una solución $a = a^* + \delta a(t)$, con $|\delta a(t)| \ll |a^*|$ una pequeña perturbación. Como la perturbación es pequeña la ecuación se puede linearizar haciendo un desarrollo en serie de Taylor a primer orden en δa , lo que nos lleva a una ecuación diferencial *lineal* para $\delta a(t)$. Las soluciones son por lo tanto siempre exponenciales, del tipo $\delta a = \delta a_0 \exp(\sigma t)$. El signo de la parte real de σ nos enseña sobre la estabilidad (lineal) de la solución a^* . Si $\text{Re}(\sigma)$ es negativo (positivo), la solución es estable (inestable, respectivamente).

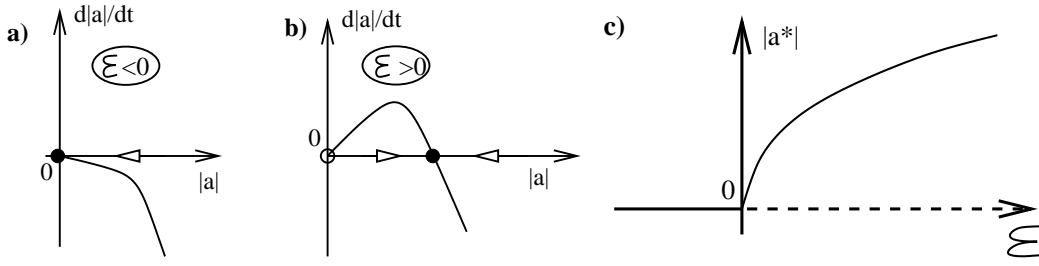


Figure 4: Retrato de fase ($|a|$, $|\dot{a}|$) del módulo de la amplitud dada por la ecuación (5), para los dos casos $\epsilon < 0$ (a) y $\epsilon > 0$ (b). Los símbolos \bullet y \circ indican los puntos fijos estables e inestables respectivamente.

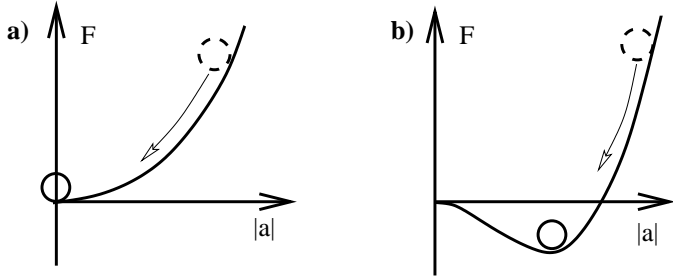


Figure 5: Función de Liapunov para los dos casos $\epsilon < 0$ (a) y $\epsilon > 0$ (b).

Existe una manera más gráfica de estudiar la estabilidad para sistemas dinámicos de dimensión 1 o 2. La Figura 4a,b muestra el *retrato de fase* del módulo de a , es decir $|\dot{a}|$ contra $|a|$, que proviene directamente de la ecuación (5). Los puntos fijos corresponden a las intersecciones de las curvas con el eje $|\dot{a}| = 0$. Si la derivada de la curva en el punto fijo es negativa (positiva), el punto fijo es estable (inestable, respectivamente). Las flechas indican las trayectorias del sistema con una condición inicial arbitraria: los puntos estables (\bullet) atraen las trayectorias, los puntos inestables (\circ) las repelen. Vemos que el comportamiento cambia cualitativamente dependiendo del signo de ϵ , implicando una bifurcación en $\epsilon = 0$. En el caso $\epsilon > 0$, la solución trivial $a^* = 0$ es *inestable*, es decir que el estado conductivo pierde estabilidad y todas las trayectorias terminan en el nuevo punto estable $|a^*| = \sqrt{\epsilon}$. La Figura 4c resume los resultados en *un diagrama de bifurcación* ($|a^*|$ contra el parámetro de control ϵ). Las líneas continuas y punteadas representan soluciones estables e inestables, respectivamente.

c) La dinámica de la amplitud dada por Ec.(5) es *disipativa*. Esto quiere decir que es posible encontrar una cantidad (función de la amplitud a) que siempre decrece con el tiempo. A tiempos largos, cuando el sistema alcanza un estado estacionario, esa cantidad se encuentra por lo tanto en un mínimo. A este tipo de cantidad, análoga a una energía (o energía libre), se le llama función de Lyapunov. Para calcularla, notemos que la ecuación (5) se puede escribir en forma gradiente, es decir como:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial F(a, \bar{a})}{\partial \bar{a}}, \quad (6)$$

con $F(a, \bar{a}) = -\epsilon|a|^2 + |a|^4/2$ (recordamos que $|a|^2 = a\bar{a}$). Similarmente, $d\bar{a}/dt = -\partial F(a, \bar{a})/\partial a$. Si cualquier sistema dinámico se puede re-escribir en una forma como la de la Ec.(6), entonces $dF/dt = \dot{a}\partial F/\partial a + \dot{\bar{a}}\partial F/\partial \bar{a} = -2|da/dt|^2 \leq 0$.

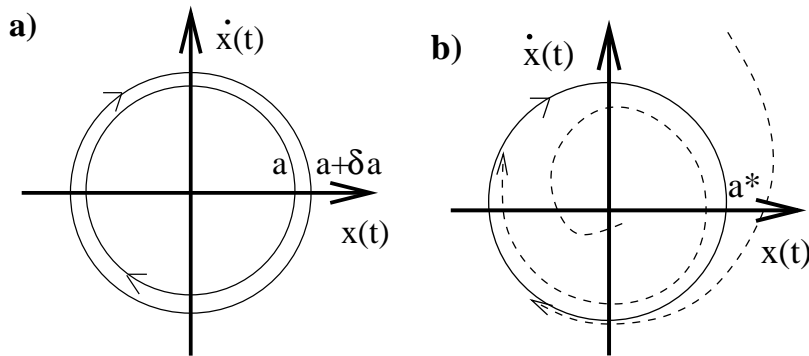


Figure 6: **a)** Retrato de fase de un oscilador lineal: infinitamente cerca de una trayectoria cerrada se puede encontrar otra trayectoria cerrada. **b)** Ejemplo de oscilador no lineal: sin importar la condición inicial, todas las trayectorias convergen hacia un único ciclo límite.

La Figura 5 muestra F contra $|a|$. Para $\epsilon > 0$, F es minimal para un valor de $|a|$ diferente de cero. La derivada de F con respecto a $|a|$ se anula en dos puntos, pero solamente uno es estable. En el punto inestable $|a| = 0$, la derivada segunda es negativa. Para todos los valores de ϵ , la dinámica lleva la amplitud hacia un mínimo de F , que se alcanza a $t = \infty$. Para hacer una analogía mecánica, la evolución temporal de la amplitud dada por la Ec.(5) es parecida a la trayectoria de una canica que cae en una taza de miel muy viscosa (sin aceleración).

El modelo de la ecuación (5), aunque reducido, es bastante pertinente para describir el fenómeno de la convección (en una dimensión espacial). Sus predicciones (como la amplitud de la convección que crece como $\sqrt{\epsilon}$) están en buen acuerdo con datos experimentales. La bifurcación (ver Figura 4c) es llamada *supercrítica*, y es análoga a las transiciones de fases de segundo orden en física estadística. Por ejemplo, no puede haber coexistencia en este caso: dependiendo del valor de ϵ , se observa un estado de convección o uno de conducción, pero los dos no son estables al mismo tiempo.

2.2 Osciladores no lineales

Presentamos en esta sección un nuevo tipo de comportamiento de gran importancia y muy común en la Naturaleza: las oscilaciones no lineales. Por principio de causalidad, para tener oscilaciones en un sistema dinámico es necesario que su dimensión N sea mayor o igual a 2.

Las oscilaciones *lineales* son muy conocidas y descritas de la manera más simple por la ecuación del oscilador armónico $\ddot{x} + x = 0$, que tiene la familia de soluciones $x(t) = a \cos(t)$, con a una amplitud arbitraria (fijamos la frecuencia al valor 1). Si plotamos $\dot{x}(t)$ contra $x(t)$, las curvas son trayectorias cerradas (de por la periodicidad de todas las soluciones) y circulares, de radio a (ver Figura 6a). Hay una infinidad de trayectorias cerradas: podemos elegir la amplitud a como queramos en la condición inicial.

Las oscilaciones *no lineales* son muy diferentes (Figura 6b): no podemos elegir la amplitud a como queramos. Más bien, el sistema converge *solo* hacia un ciclo de amplitud bien definida, a^* . Eso define un *ciclo límite*: se trata de una trayectoria cerrada y *aislada*, es decir sin otras trayectorias cerradas en su vecindad inmediata. En otras palabras, estos sistemas son capaces de regular (o auto-sostener) la amplitud de sus oscilaciones, lo cual, por ejemplo, es una propiedad muy importante en los sistemas biológicos.

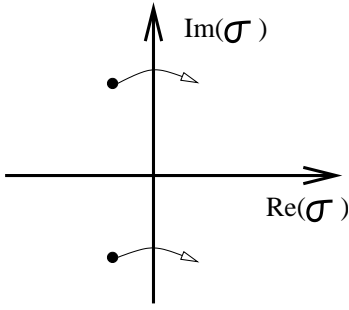


Figure 7: Bifurcación de Hopf: un par de eigenvalores cruza el eje imaginario, dando lugar a una inestabilidad con comportamiento oscilatorio.

La ecuación de van der Pol es un ejemplo muy conocido de oscilador no lineal. Se escribe en la forma:

$$\ddot{x} + (x^2 - 2\epsilon)\dot{x} + x = 0. \quad (7)$$

Esa ecuación ha jugado un papel importante en el desarrollo de la Física No lineal de mediados del siglo XX. Fue inicialmente introducida para describir la corriente en un circuito eléctrico con una dioda tunel, pero tiene aplicaciones en contextos mucho más amplios (ver más adelante). Si el término entre paréntesis en (7) fuese una constante positiva, tendríamos un oscilador armónico amortiguado. El término $x^2\dot{x}$ proporciona un amortiguamiento no lineal (que depende de x), y el término $-2\epsilon\dot{x}$ una disipación (si $\epsilon < 0$) o entrega (si $\epsilon > 0$) de energía. Entonces, otra vez tenemos un sistema fuera de equilibrio ². Si $\epsilon > 0$, el sistema disipa la energía recibida generando oscilaciones. Durante un solo período, el sistema recibe y disipa energía, dependiendo del signo de $(u^2 - 2\epsilon)$.

Podemos notar que $x(t) = 0$ es siempre solución (trivial) de la Ec.(7). ¿Es siempre estable esa solución? Para saberlo, suponemos que x está cerca de cero, depreciamos $x^2\dot{x}$ que es de orden cúbico y resolvemos $\ddot{x} - 2\epsilon\dot{x} + x = 0$. Las soluciones son $x(t) = x_0 \exp(\sigma t)$ (σ es también eigenvalor de la matriz 2×2 obtenida después de linearizar el sistema dinámico escrito al pie de esta página). Si suponemos que $\epsilon \ll 1$ por ahora, obtenemos dos soluciones $\sigma = \epsilon \pm i$. Concluimos que $\text{Re}(\sigma) = \epsilon$: si $\epsilon < 0$, la solución $x = 0$ es estable. Es inestable si $\epsilon > 0$. Ocurre entonces algo similar a la solución $a^* = 0$ de la ecuación (5), con una diferencia importante: la parte imaginaria distinta de cero ($\pm i$) de los eigenvalores σ es la “firma” de un comportamiento oscilatorio, ausente en la Ec. (5). Ploteamos en la Figura 7 las dos soluciones para σ en el plano complejo ($\text{Re}(\sigma), \text{Im}(\sigma)$). Cuando ϵ cambia de signo, los dos eigenvalores, que son complejos conjugados, cruzan el eje imaginario. Ese tipo de bifurcación se llama *una bifurcación de Hopf*. Para $\epsilon > 0$, las trayectorias que inician cerca del origen en el plano (x, \dot{x}) se amplifican rotando (ver Figura 6b). En tal caso, se dice que el punto fijo $x = 0$ es repulsor. Como lo mostramos a continuación, la trayectorias están asintóticamente atraídas hacia un ciclo límite.

Buscamos, para $\epsilon > 0$, soluciones aproximadas de (7) de la forma

$$x(t) = a(t)e^{it} + c.c. \quad (8)$$

(*c.c.* = $\bar{a}(t)e^{-it}$.) El factor e^{it} describe las oscilaciones, que definen una escala de tiempo rápida. La amplitud $a(t)$ nos indica cómo el sistema se acerca a su ciclo límite. Para resolver el problema

²Notar que ec. (7) es un sistema dinámico de dimensión $N = 2$. Se puede escribir en la forma (2) como $\{\dot{x}_1 = x_2 ; \dot{x}_2 = -(x_1^2 - 2\epsilon)x_2 + x_1\}$.

tenemos que encontrar una ecuación diferencial para $a(t)$. Si $\epsilon \ll 1$, el acercamiento al ciclo límite es mucho más lento que un período de una oscilación: en otras palabras, el sistema da muchas vueltas en el retrato de fase (ver Fig. 6b) antes de alcanzar al ciclo límite.

Re-escribimos entonces $x(t)$ en la Ec. (8) como una función de dos tiempos característicos muy diferentes: $x(t) = x(t_1, t_2) = a(t_2)e^{-it_1} + c.c.$. Dada la forma de σ , los dos tiempos naturales se definen como $t_1 \equiv t$ y $t_2 \equiv \epsilon t$, que se consideran como dos variables independientes en el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$. Por lo tanto se tiene que escribir el operador d/dt como $\partial/\partial t_1 + \epsilon \partial/\partial t_2$. Expandimos además x en potencias de $\sqrt{\epsilon}$: $x(t) = \sqrt{\epsilon}x_{1/2}(t_1, t_2) + \epsilon x_1(t_1, t_2) + \epsilon^{3/2}x_{3/2}(t_1, t_2) + \dots$. Sustituyendo en la ecuación de van der Pol (7), y analizando orden por orden en $\sqrt{\epsilon}$, se obtiene que: (i) el término dominante es de la forma $x_{1/2} = A(t_2)e^{-it_1} + c.c.$, como esperado; (ii) $x_1 = 0$; (iii) $x_{3/2}$ satisface una ecuación diferencial donde aparece la función $x_{1/2}$ el lado derecho:

$$\frac{\partial^2 x_{3/2}}{\partial t_1^2} + x_{3/2} = -2 \frac{\partial^2 u_{1/2}}{\partial t_1 \partial t_2} - (u_{1/2}^2 - 2) \frac{\partial u_{1/2}}{\partial t_1} \quad (9)$$

$$= \left\{ -2i \frac{dA}{dt_2} + 2iA - i|A|^2 A \right\} e^{it_1} \quad (10)$$

$$+ \{ \dots \} e^{3it_1} + c.c. ,$$

donde se han agrupado los términos oscilando como e^{it_1} , e^{i3t_1} , etc, y donde los términos en los corchetes solamente dependen del tiempo lento t_2 . La ecuación para $x_{3/2}$ es análoga a la de un oscilador armónico (término izquierdo de (9)), forzado a su frecuencia propia (término e^{it_1} en la línea (10)). Sabemos que eso es una situación de resonancia. Para que $x_{3/2}$ no sea infinito y sea físicamente aceptable, es necesario que todo el término contenido en el corchete de la línea (10) sea cero. Esa condición es *una condición de solubilidad*. Después de hacer un cambio de variable de regreso hacia el tiempo físico ($t_2 = t/\epsilon$), y hacia las amplitudes físicas ($A = a/\sqrt{\epsilon}$), se obtiene lo que buscábamos: una ecuación para la amplitud a en la ecuación (8),

$$\frac{da}{dt} = \epsilon a - \frac{1}{2}|a|^2 a. \quad (11)$$

Sorpresa... esa ecuación es exactamente de la misma forma que la ecuación (5) introducida de manera fenomenológica para el problema (aparentemente bien diferente) de la convección de Rayleigh-Bénard. Entonces los resultados de la Figura 4 aplican. Deducimos que para $\epsilon > 0$, existe una solución con $|a^*| = \text{constante} = \sqrt{2\epsilon}$: este valor corresponde a la amplitud de unas oscilaciones periódicas o el diámetro del círculo de la Figura 6b. Para todo valor fijo del parámetro ϵ , hay un solo círculo, es decir una sola trayectoria cerrada: tenemos entonces un ciclo límite único. De manera análoga a la discusión anterior sobre las simetrías espaciales, la forma de la no linealidad en (11) se debe a la invarianza de la ecuación (7) por traslación en el tiempo (la ecuación no depende explícitamente de t).

Recordamos que el análisis (un poco técnico) que precede es válido solamente si $\epsilon \ll 1$, cuando la escala temporal de variación de la amplitud es mucho más larga que un período de oscilación. Este formalismo es conocido bajo el nombre de *análisis de multi-escala* o *análisis debilmente no lineal*, y nos conduce a *ecuaciones de amplitudes*. Este tipo de análisis tiene una inmensa ventaja: nos muestra una **universalidad** de los fenómenos no lineales cerca de sus puntos de bifurcación. Esa universalidad es el análogo dinámico de la universalidad en los puntos críticos de los sistemas en el equilibrio termodinámico. Las ecuaciones del tipo (11) se conocen como *ecuaciones de Ginzburg-Landau*, también en analogía con la descripción de

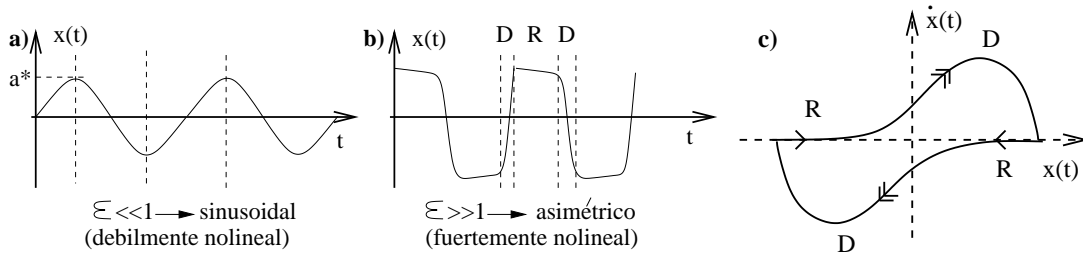


Figure 8: **a)** Ciclo límite casi-sinusoidal en el régimen debilmente no lineal. **b)** Medio excitable: las fases de disparo (D) son mucho más cortas que las de recuperación (R). **c)** Retrato de fase correspondiendo a b), de forma muy poco circular!

las transiciones de fases propuesta por los rusos Vitaly Ginzburg y Lev Landau en los años cuarenta. Las ecuaciones de Ginzburg-Landau (y relacionadas) proporcionan una descripción moderna de muchos fenómenos no lineales (ver más adelante).

Si agregamos a la ecuación (7) un término cúbico anarmónico, $\ddot{x} + (x^2 - 2\epsilon)\dot{x} + x + \alpha x^3 = 0$, se puede mostrar, siguiendo el camino anterior, que tenemos soluciones de la forma (8) con

$$\frac{da}{dt} = \epsilon a - \frac{1}{2}(1 - 3\alpha i)|a|^2 a. \quad (12)$$

Uno de los coeficientes de la ecuación de Ginzburg-Landau es ahora *complejo*. Por esa propiedad, la ecuación no se puede escribir en la forma potencial de la relación (6), por lo tanto la evolución de la amplitud ya no es disipativa. La parte imaginaria $-3\alpha i$ en (12) provoca un cambio de frecuencia del ciclo límite: $x(t) = \sqrt{2\epsilon} e^{i(1+3\alpha/2)t}$.

2.3 Medios excitables

Los medios excitables son una forma particular de osciladores no lineales. De manera general, son sistemas que responden a un estímulo externo por dos fases temporales: primero un cambio de estado importante y rápido (o “disparo”), seguido por una fase lenta de “acumulación” o “recuperación”. Si el estímulo externo se mantiene constante en el tiempo, esas dos fases se pueden suceder una después de la otra, dando lugar a una actividad periódica. Debido a su asimetría, esas oscilaciones no se parecen para nada a una función sinusoidal del tiempo, ver Figura 8a, b y c.

Un ejemplo físico de medio excitable es la cuerda de un violín tocado por un principiante. El movimiento del arco proporciona el estímulo. Si el músico tiene poca experiencia, la cuerda se queda pegada al arco por un tiempo antes de deslizarse de manera brusca produciendo un sonido poco melódico. Este fenómeno también es conocido en materia condensada como “stick-slip” (pegado-desliz) entre dos superficies rugosas en contacto. Una cuerda de violín bien tocado vibra de manera no muy diferente de una sinusoidal (Figura 8a). Otro ejemplo de medio excitable son los sismos, que ocurren de manera más o menos periódica. Las placas del mantel terrestre están fuera de equilibrio, forzadas por los movimiento convectivos de las capas más profundas de la tierra. Dos placas en contacto pueden derivar en direcciones opuestas bajo el efecto de fuerzas de corte: la deformación resultante se puede acumular durante decenas de años o siglos sin que las placas se muevan una con respecto a la otra en su zona de contacto. Un sismo ocurre cuando las fuerzas de roce estáticas en la zona de contacto no pueden balancear

las fuerzas elásticas de deformación. Este fenómeno es muy rápido (unos minutos a lo mucho), y conduce a un nuevo estado: a una relajación de los esfuerzos elástico.

Muchos tejidos biológicos se consideran también como excitables, propiedad que les permite cumplir funciones vitales. Las membranas de las neuronas son sensibles a la corriente eléctrica y también producen corriente cuando están activadas. Bajo cierto impulso eléctrico, una neurona puede generar una diferencia de potencial relativamente alta entre sus extremidades debido a la acumulación de iones. Esa diferencia de potencial se mantiene por un tiempo corto durante el cual la neurona puede transmitir señales a otras neuronas conectadas a ella, para excitarlas a su vez. La información que fluye de esa manera a través una red neuronal es “selectiva” (y por lo tanto no lineal): ocurre solamente con estímulos suficientemente altos. El tiempo de recuperación de una neurona después del disparo es bastante largo (algunos ms). Las células del músculo cardíaco tienen un comportamiento similar. Una célula cardiaca aislada no tiene una actividad particular. Si recibe cierta señal constante, empieza a latir de manera regular y autosostenida. Otro ejemplo de medio excitable es la reacción química oscilante de Belusov-Zhabotinsky. Veremos más adelante cómo un conjunto de osciladores no lineales con las propiedades de excitabilidad pueden sincronizarse espacialmente.

Un modelo clásico de medio excitable es el de Fitzhugh-Nagumo (1961-62), inicialmente introducido para la descripción de membranas nerviosas. Es un sistema dinámico con $N = 2$, dado por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = \epsilon \left(x - \frac{x^3}{3} \right) - w \quad (13)$$

$$\dot{w} = x - \gamma w, \quad (14)$$

donde x representa la concentración relativa de un “propagador” (que es alta cuando el sistema está excitado), y w un “controlador” que inhibe el crecimiento del propagador (por el signo menos en la Ec.(13)). El propio propagador activa también la secreción del controlador que lo inhibe (Ec.(14)). Combinando las ecuaciones (13) y (14) obtenemos una relación para x solamente:

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - (1 - \gamma/\epsilon))\dot{x} + (1 - \gamma\epsilon)x + \gamma x^3/3 = 0, \quad (15)$$

... que es una ecuación de van der Pol anarmónica. Elijiendo $\gamma = 0$, obtenemos una ecuación muy parecida a la Ec.(7):

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (16)$$

La ecuación (16) tiene propiedades de excitabilidad en el límite $\epsilon \gg 1$, es decir el límite opuesto de la sección anterior. Este límite corresponde a un régimen *fuertemente no lineal*. Para ver esto, hacemos el cambio de variable $y = -w/\epsilon$ y definimos $F(x) = x^3/3 - x$ (variables de Lienard). Se obtiene el sistema:

$$\dot{x} = \epsilon[y - F(x)] \quad (17)$$

$$\dot{y} = -\frac{x}{\epsilon} \quad (18)$$

La Figura 9 muestra las dos cero-clinas del sistema, es decir las curvas del espacio de fase (x, y) tales que $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$. Corresponden a $y = F(x)$ y $x = 0$. Las cero-clinas nos muestran el signo de las velocidades \dot{x} y \dot{y} . (La intersección de las cero-clinas corresponden al punto fijo $(x = 0, y = 0)$, que en este caso es repulsor.) La ecuación (18) muestra claramente

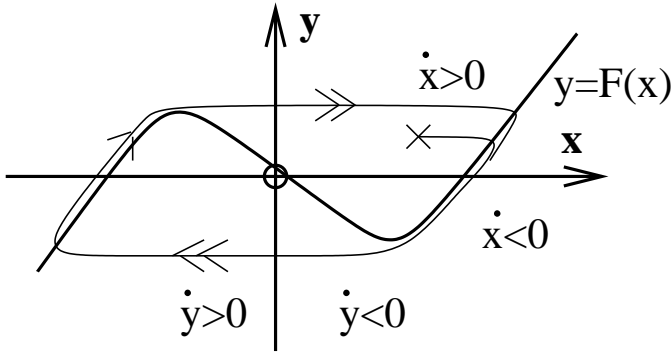


Figure 9: Trayectoria empezando en el punto \times , dado por las Ecs.(17)-(18) para $\epsilon \gg 1$.

que cuando $\epsilon \gg 1$, la variable y es lenta. En cambio, la variable x es rápida (ecuación (17)), excepto cuando el sistema se encuentra cerca de la curva $y = F(x)$. La Figura 9 muestra una trayectoria típica con la condición inicial indicada por el símbolo \times . Lejos de $y = F(x)$, tenemos $|\dot{x}| \gg |\dot{y}|$: las trayectorias son líneas prácticamente horizontales con velocidades altas. Cuando el sistema se acerca de $y = F(x)$ en el espacio de fase, \dot{x} y \dot{y} son del mismo orden (pequeñas). Como \dot{x} cambia de signo cuando la trayectoria cruza cualquier punto de la curva $y = F(x)$, un movimiento periódico se establece. Contrariamente al caso $\epsilon \ll 1$, el sistema alcanza muy rápidamente el ciclo límite, prácticamente después de una sola oscilación. Las oscilaciones obtenidas son muy anarmónicas ($\neq \sin t$) y de la forma descrita en la Figura 8b y c.

3 Patrones espaciales

En esta tercera parte, abordamos problemas que dependen tanto del tiempo como de las coordenadas espaciales. Describen sistemas de mayor complejidad modelados por sistemas dinámicos con $N \rightarrow \infty$ o ecuaciones diferenciales con derivadas parciales. Los modelos que se presentan más adelante reproducen la gran riqueza de propiedades espaciales observados en la Naturaleza y permiten un entendimiento más profundo de los fenómenos de auto-organización.

Muchos sistemas no lineales espacialmente extendidos forman *patrones*. La Figura 10 muestra unos ejemplos: patrones hexagonales observado en convección de Rayleigh-Bénard, rayas en dunas de arena o la pigmentación de la piel de una zebra.

3.1 Modelo de Swift-Hohenberg

La ecuación de difusión (1) es demasiado simple para explicar la formación de patrones periódicos. Formar un patrón requiere crear heterogeneidades espaciales. Por el contrario, la ecuación de la difusión las destruye por un proceso de uniformización. Para ver cómo, consideremos al instante $t = 0$ un medio compuesto de zonas frías y calientes alternadas como en capas. Modelamos esas variaciones espaciales de temperatura como $T = T_0 + \delta T \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$. El vector de onda \vec{k} indica la periodicidad y la dirección del gradiente de temperatura (la dirección normal a las capas). Si T obedece a la ecuación de la difusión, entonces podemos escribir $\delta T(t) = \delta T_0 \exp(\sigma t)$, con

$$\sigma = \sigma(k) = -Dk^2, \quad (19)$$



Figure 10: De izquierda a derecha: patrones de bandas en dunas y zebras; patrones hexagonales en convección de Rayleigh-Bénard.

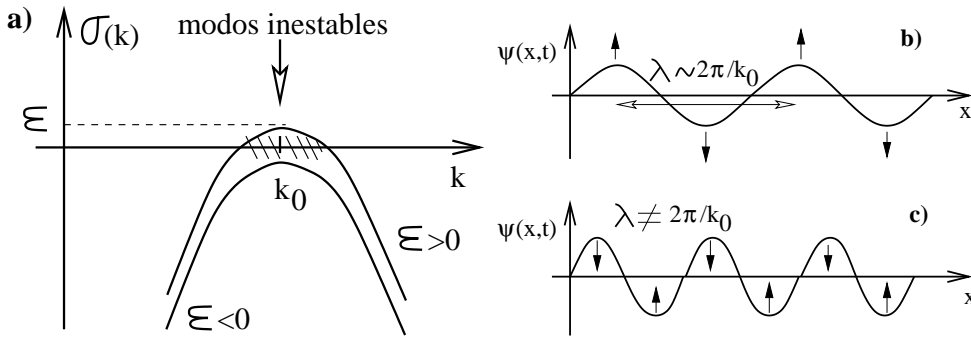


Figure 11: **a)** Relación de dispersión del modelo de Swift-Hohenberg. Para $\epsilon > 0$, un intervalo de números de onda inestables aparece (con $\sigma > 0$). Una condición inicial sinusoidal crece solamente si su periodicidad está cerca de $2\pi/k_0$ [**b**),**c**]

con $k = |\vec{k}|$. Encontramos que la tasa de crecimiento σ es siempre negativa: $\delta T \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, para cualquier período $2\pi/k$ de las heterogeneidades. Entonces, el estado final es siempre con temperatura uniforme constante, $T = T_0$. Sin embargo, no todas las variaciones espaciales iniciales decaen a la misma velocidad dado que σ depende de k : si las zonas frías y calientes contiguas son delgadas (k grande), desaparecen sus diferencias de temperatura mucho más rápido que si son extensas. El tipo de relación (19) se llama comunmente la *relación de dispersión*.

Ahora consideremos un sistema descrito por un campo $\psi(\vec{r}, t)$, que puede representar una temperatura, concentración o velocidad, según el problema considerado. Suponemos que la relación de dispersión, que describe la parte lineal del sistema, es la siguiente:

$$\sigma = \epsilon - \frac{1}{k_0^4}(k_0^2 - k^2)^2, \quad (20)$$

con las mismas notaciones anteriores, y donde ϵ y k_0 son dos parámetros fijos. Esta relación (σ como función de k) está ploteada en la Figura 11a. La relación de dispersión es practicamente una parábola (invertida) centrada en un número de onda característico k_0 . En el punto $k = k_0$, σ es maximal y vale ϵ . Aparecen dos tipos de comportamiento muy diferentes. Si $\epsilon < 0$ entonces $\sigma < 0$ para todo k . Por lo tanto, cualquier modulación inicial del campo, $\psi(x) = a_0 \cos(kx)$ decae exponencialmente con el tiempo [dado que $\psi(x, t) = a_0 \exp(\sigma t) \cos(kx)$]. Si $\epsilon > 0$, en cambio, existe un intervalo de números de onda para los cuales $\sigma(k) > 0$. La amplitud

de esas perturbaciones crece en el tiempo. Si $\epsilon \ll 1$, nada más los números de ondas muy cercanos a k_0 pueden crecer (Figura 11b); todos los demás decrecen (Figura 11c). Los modos estables decrecen rápidamente; en cambio, los modos inestables crecen lentamente y por lo tanto dominan la dinámica. Este mecanismo favorece entonces la formación de patrones o heterogeneidades espaciales de número de onda bien definido, k_0 .

¿Cuál es la ecuación diferencial lineal con derivadas parciales para el campo ψ que tenga la relación de dispersión (20)? Multiplicamos (20) por ψ , y notamos que $\sigma\psi$ es equivalente a $\partial\psi/\partial t$ y que $-k^2\psi$ es equivalente a $\Delta\psi$. Obtenemos la ecuación lineal: $\partial_t\psi = \epsilon\psi - k_0^{-4}(k_0^2 + \Delta)^2\psi$. Para evitar que los modos inestables exploten exponencialmente con el tiempo es necesario saturarlos con un término no lineal cúbico, por ejemplo (de manera similar a la Ec. (5)):

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \epsilon\psi - k_0^{-4}(k_0^2 + \Delta)^2\psi - \psi^3. \quad (21)$$

Esta ecuación fue introducida por Swift y Hohenberg (1977) en el contexto de la convección de Rayleigh-Bénard. Es un modelo reducido y por lo tanto simplificado. Sin embargo, produce patrones de bandas muy realistas, parecidos a los experimentales. La ecuación (21) puede producir patrones hexagonales si se le añade un término cuadrático ($c\psi^2$).

La ecuación (21) tiene la ventaja de tener una estructura potencial. Se puede re-escribir como $\partial_t\psi = -\delta F/\delta\psi$, donde δ representa la derivada funcional de Fréchet, y F es un funcional de Liapunov (o “energía libre” total del sistema):

$$F[\psi] = \int d\vec{r} \left\{ -\epsilon\frac{\psi^2}{2} + \frac{1}{2k_0^4}[(k_0^2 + \Delta)\psi]^2 + \frac{\psi^4}{4} \right\} \quad (22)$$

A tiempos largos, el estado estacionario tiende hacia un mínimo de F , dado que $dF(t)/dt \leq 0$. La Figura 12 muestra una condición inicial aleatoria para el campo ψ y su evolución ulterior obtenida por resolución numérica de la ecuación de Swift-Hohenberg (21) con computadora. Aparece un patrón característico de rayas con número de onda k_0 . Inicialmente, las rayas están desordenadas, formando una textura “policristalina”. Luego, el sistema se ordena lentamente. Las configuraciones más simples que se observan conforme pasa el tiempo corresponden a valores cada vez más bajos de la energía libre (22).

Soluciones analíticas se pueden obtener por análisis debilmente no lineal de la Ec. (21), siguiendo el espíritu del cálculo de la sección (2.2). Buscamos soluciones de la forma $\psi(x, t) = a(x, t)e^{ik_0x} + c.c.$, donde x representa la dirección normal a las rayas (ver también Fig.11b,c). Se obtiene la ecuación de amplitud:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \epsilon a + \xi_0^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 3|a|^2 a, \quad (23)$$

con ξ_0 una longitud ($\xi_0 = 1/2k_0$). Vemos otra vez, que esta es una ecuación de Ginzburg-Landau, perfectamente consistente con la ecuación (5) propuesta de manera heurística. La única diferencia es la presencia de un nuevo término, $\xi_0^2 \partial_x^2 a$, que toma en cuenta las posibles variaciones espaciales de la amplitud. Esas variaciones se deben a imperfecciones o defectos topológicos, tal como se observa en la Figura 12. Si $\partial_x a = 0$, la solución es la de un patrón de rayas perfectamente regular ($a = cst$). Su diagrama de bifurcación es el de la Figura 4b.

• $\epsilon = 0.04$ • $t = 0, 1000, 2000, 4000, 8000, 36000$.

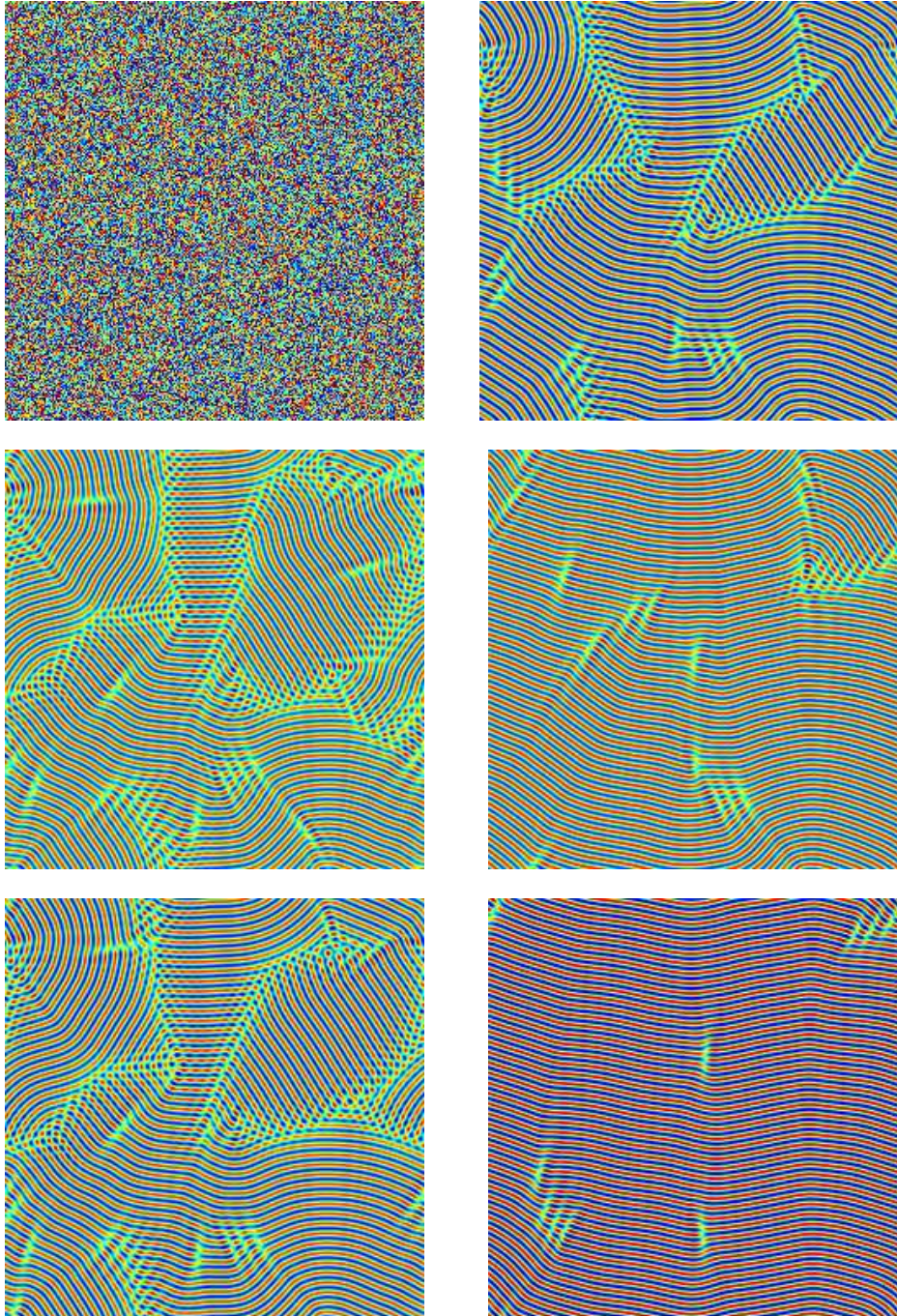


Figure 12: Evolución de una solución numérica de la Ec.(21). Las regiones de color oscuro (claro) corresponden a zonas con $\psi > 0$ ($\psi < 0$, respectivamente).

3.2 Modelos de reacción-difusión

Para ilustrar la generalidad del tipo de bifurcación representado por el digrama 11a, consideremos otra aplicación importante: los patrones de Turing (1952), producidos por procesos de reacción-difusión. Turing quería proponer una teoría de la morfogénesis con aplicación a la pigmentación de la piel de los animales. La validez de este mecanismo está muy discutida hoy en día, pero la idea sigue siendo interesante. Se suele contar una historietta para introducir estos fenómenos. Unos misioneros llegan a una isla de caníbales. Cuando dos misioneros encuentran a un canibal, resultan tres misioneros. Cuando dos caníbales encuentran a un misionero, resultan dos caníbales. Los misioneros caminan, los caníbales corren. ¿Qué patrón se forma? De manera más seria, consideremos dos sustancias químicas en solución, u (activador) y v (inhibidor), con constantes de difusión D_u y D_v respectivamente. Las concentraciones u y v satisfacen las ecuaciones de reacción-difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha + u^2v - (1 + \beta)u + D_u \Delta u \quad (24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta u - u^2v + D_v \Delta v. \quad (25)$$

Este modelo (conocido como el modelo “Brusselator”) fue introducido por Glansdorff y Prigogine (1971) y describe las concentraciones de productos intermedios, u y v , producidos durante la secuencia de reacciones: $\alpha \rightarrow u$; $2u+v \rightarrow 3u$; $\beta+u \rightarrow v+d$; $u \rightarrow c$. Las concentraciones de los reactivos α y β se suponen constantes en el tiempo. Entonces, el reactor químico las recibe por una entrada, mientras se debe sacar el exceso por otro lado. Unos flujos de materia atraviesan el sistema que es, una vez más, fuera de equilibrio.

Las Ecs.(24)-(25) tienen soluciones uniformes constantes ($\partial_x u = \partial_x v = 0$): $u_0 = \alpha$ y $v_0 = \beta/\alpha$. Para ver la posible formación de estructuras espaciales periódicas perturbamos esta solución uniforme con modulaciones sinusoidales de número de onda k de prueba, fijo: $u = u_0 + a \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} + \sigma t]$, $v = v_0 + b \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} + \sigma t]$, con $a \ll u_0$ y $b \ll v_0$. Sustituyendo en las Ecs.(24)-(25) y linealizando a primer orden en a y b , se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones para a y b . Para que existan otras soluciones más que las triviales $a = b = 0$, la tasa de crecimiento σ tiene que ser eigenvalor de la matriz 2×2 asociada a este sistema de ecuaciones lineales. El análisis del signo de los dos eigenvalores σ_1 y σ_2 nos permite concluir sobre la evolución de la perturbación y la estabilidad de la solución uniforme. [**Nota:** Recordar que este tipo de análisis es lineal: solamente describe la evolución de una solución inestable a tiempos cortos. No nos dice gran cosa sobre los patrones formados a tiempos largos, que pueden ser descritos únicamente por un análisis no lineal, es decir por una ecuación del tipo (23).]

El resultado es el siguiente: uno de los dos eigenvalores tiene la misma forma cualitativa que en la Figura 11a. El número de onda marginal k_0 está dado en este caso por

$$k_0 = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{D_u D_v}} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

y aparece un intervalo de números de onda inestables alrededor de k_0 si la concentración del reactivo β es mayor que un valor crítico ($\epsilon = \beta - \beta_0$):

$$\beta > \beta_0 \equiv \left(1 + \alpha \sqrt{\frac{D_u}{D_v}} \right)^2. \quad (27)$$

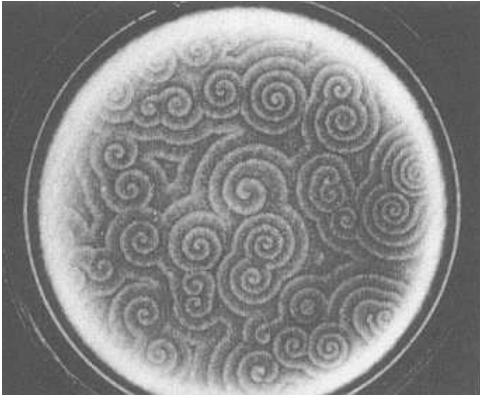


Figure 13: Ondas espirales en colonías de bacterias. Este patrón está bien descrito por la ecuación (33).

Se puede mostrar que, en $k = k_0$ y $\beta = \beta_0$, $\sigma_1 + \sigma_2 = \alpha(\sqrt{D_u/D_v} - \sqrt{D_v/D_u}) + \alpha^2(D_u/D_v - 1)$. Para que el estado uniforme (u_0, v_0) sea estable para $\beta < \beta_0$, es necesario que $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$, condición que se cumple solamente si las constantes de difusión son muy diferentes: $D_u \ll D_v$. Esta última desigualdad es una condición necesaria para la formación de patrones de Turing. La formación de patrones en reacción químicas se debe a la difusión, lo que puede parecer contraintuitivo dado que la difusión tiende más bien a uniformizar concentraciones. Sin embargo, no hay que olvidar que el sistema está fuera de equilibrio y que los términos de reacción cambian la física del problema.

Además de los patrones de Turing, las ecuaciones (24)-(25) muestran una gran riqueza de comportamientos. Para otros valores de los parámetros, los eigenvalores (σ_1, σ_2) tienen una parte imaginaria distinta de cero. Entonces, la inestabilidad de (u_0, v_0) se asocia con la formación de un patrón no-estacionario, oscilante. Estos patrones degeneran con el tiempo en estados de *caos espacio-temporal*. La complejidad del modelo Brusselator es por lo tanto mayor a la del modelo de Swift-Hohenberg (21). Una explicación cualitativa es que las ecuaciones (24)-(25) *no tienen una estructura potencial*. No se puede encontrar un funcional $F[u, v]$ tal que $\partial_t u = -\delta F/\delta u$ y $\partial_t v = -\delta F/\delta v$. Entonces, la evolución del sistema no está controlada por la minimización en el tiempo de una cantidad global.

3.3 La ecuación de Ginzburg-Landau compleja

Vimos que el modelo de Swift-Hohenberg (21) forma estructuras periódicas de tipo rayas que a tiempos largos alcanzan un estado estacionario: las rayas no se mueven, se quedan fijas. Esa propiedad se debe al hecho de que los coeficientes de la ecuación de amplitud asociada (23) son todos *reales*. Sin embargo, existen patrones *no estacionarios* (como en el modelo Brusselator), en particular los que se generan después de una bifurcación de Hopf en su etapa lineal inicial (ver Fig.7). Una vez formados, los patrones no lineales resultantes pueden ser *(i)* ondas viajeras y espirales (ver Figura 13), *(ii)* ondas solitarias (o solitones), *(iii)* caóticos. ¿Qué tipo de ecuación genérica puede dar cuenta de estos casos? La ecuación de Ginzburg-Landau compleja.

Para dar un ejemplo concreto, regresemos a los medios excitables y al modelo de FitzHugh-Nagumo, pero incluyendo una parte espacial al problema. Suponemos que la concentración (re-notada v) del activador puede difundir e influenciar la dinámica de las células vecinas.

Re-escribimos las ecuaciones (13)-(14) con un término de difusión:

$$\dot{v} = \epsilon \left(v - \frac{v^3}{3} \right) - w + \Delta v \quad (28)$$

$$\dot{w} = v - \gamma w, \quad (29)$$

(se desprecia la difusión del controlador w). Recombinando estas dos ecuaciones se llega a una ecuación de la siguiente forma para v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + v = U[v] - \gamma \Delta v + \Delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right), \quad (30)$$

donde $U[v]$ es un operador que no involucra derivadas espaciales, ya presente en el problema de FitzHugh-Nagumo uniforme (ver Ec.(15)). Debido a que el problema es muy parecido al del oscilador de van der Pol anarmónico, para simplificar el algebra y sin restringir la generalidad, elegimos la forma de U de aquel caso: $U[v] = -(v^2 - 2\epsilon)v - bv^3$. Buscamos soluciones de (30) que generalizan la forma (8)

$$v(\vec{r}, t) = a(\vec{r}, t)e^{it} + \bar{a}(\vec{r}, t)e^{-it}. \quad (31)$$

El camino para obtener la ecuación para la amplitud a es el mismo que en el análisis multi-escala de la sección 2.2. Hay una nueva variable lenta, de espacio, definida por $\vec{r}_2 = \sqrt{\epsilon}\vec{r}$. Al orden $\epsilon^{3/2}$, se obtiene una ecuación del tipo (10) con dos términos espaciales adicionales, $(-\gamma + i)(\partial_{x_2}^2 + \partial_{y_2}^2)a$. La condición de solubilidad nos conduce a:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \epsilon a - \frac{1}{2} \left(1 - i\frac{3}{2}b \right) |a|^2 a + \frac{1}{2}(1 + i\gamma)\Delta a \quad (32)$$

Después de un cambio de unidad y de notación, la ecuación se puede re-escribir de la forma general,

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \epsilon a - (1 + i\beta)|a|^2 a + (1 + i\alpha)\Delta a. \quad (33)$$

Esta ecuación es *la ecuación de Ginzburg-Landau compleja*. Además de tener aplicaciones para los medios excitables y las reacciones químicas oscilantes (de tipo Brusselator o Belusov-Zhabotinsky), es relevante en muchos problemas, por ejemplo de óptica no lineal o de dinámica de poblaciones de bacterias. Tiene también aplicaciones en materia condensada para describir los fenómenos de la condensación de Bose-Einstein ($\alpha \gg 1, \beta \gg 1$) y de la superconductividad ($\alpha = 0, \beta = 0$)! Esta ecuación depende esencialmente de dos parámetros (α y β) y admite una multitud de soluciones, algunas de una complejidad extraordinaria. El “diagrama de fase” de los posibles comportamientos de la Ec.(33) no está completamente conocido, a pesar de los muchos estudios numéricos que se han realizado.

Ondas viajeras. La ecuación (33) tiene sin embargo soluciones simples características en forma de ondas viajeras, es decir de estructuras coherentes espacialmente extendidas. En sistemas biológicos, las ondas viajeras permiten propagar información o poner en “fase” un conjunto de células de manera eficiente (en un tiempo τ proporcional a L – el tamaño del órgano –, mucho más corto que lo que se obtendría por simple difusión, $\tau \sim L^2$). Suponiendo que $a = a_0 e^{i(kx - \omega t)}$, se obtiene

$$a_0 = \sqrt{\epsilon - k^2}, \quad \omega = (\alpha - \beta)k^2 + \beta\epsilon. \quad (34)$$

La amplitud de la onda depende de su número de onda k y es única, una propiedad típica de los medios no lineales. La relación de dispersión de la onda es muy diferente de la relación usual $\omega = ck$ para medios lineales. Se puede escribir como $\omega = \beta a_0^2 + \alpha k^2$: el coeficiente β contribuye por efecto de la no linealidad, mientras que α genera un término de dispersión.

Otras soluciones. La ecuación (33) admite otras soluciones analíticas o semi-analíticas. Mencionamos como ejemplos las ondas espirales (un defecto topológico asociado a las ondas viajeras, ver Figura 13) y las ondas solitarias o solitones (estructuras coherentes localizadas).

4 ¿Definir los Sistemas Complejos?

Cómo contestar a la pregunta ¿Qué son los sistemas complejos? Es una pregunta difícil, tal vez vana y sin respuestas definitivas. Las palabras “sistemas complejos” no definen una disciplina, más bien un conjunto de problemas que se originaron en áreas distintas. Es un nombre un poco abusivo, dado que ninguna rama de la Ciencia (y de la Física en particular) es sencilla. Este nombre se empezó a utilizar por alguna razón histórica.

Sin embargo, mencionamos los procesos fuera de equilibrio como punto de partida. A continuación podemos discutir dos propiedades importantes de muchos sistemas fuera de equilibrio que los hacen tan difíciles de entender, pero también tan fascinantes. *a)* Las propiedades más importantes de estos sistemas, en cuanto en su estado, estructura o forma, se deben a su *dinámica*, que es a menudo irreversible en el tiempo. Por eso se habla a veces de propiedades emergentes. Una descripción meramente estática suele resultar no solamente incompleta sino también incapaz de reproducir la complejidad (y belleza) de muchas estructuras observadas en la Naturaleza. *b)* Una segunda propiedad, bien diferente y que mencionamos ahora por primera vez, es que muchos sistemas “complejos” son *desordenados*. Es decir que son formados de muchos elementos que interactúan entre ellos, con interacciones que varían de un elemento al otro. No hay un par de reglas idénticas para todos sino una multitud de reglas.

Podemos sospechar que un sistema con las propiedades *a)* y *b)* antes mencionadas debe sin duda ser complejo!

4.1 Dinámica

Para ilustrar otra vez la idea *a)*, consideremos un ejemplo clásico, un líquido sobre-enfriado, es decir enfriado bajo su temperatura de fusión. Por ejemplo, agua bajo 0° . El líquido no se encuentra entonces en un estado estable (es más bien meta-estable): está fuera de equilibrio. La teoría de la termodinámica de equilibrio nos predice que el sistema debe sufrir un cambio de fase para establecerse en el nuevo estado estable: la fase sólida. Lo que no nos dice esta teoría, es *cómo* la fase sólida se forma.

Típicamente se forman “gotas” o pequeñas islas de fase sólidas en medio del mar líquido. Al principio, estas islas sólidas son esféricas. El diámetro de las islas crece conforme pasa el tiempo. Las partes del líquido que se encuentran cerca del borde de una isla se solidifican con cierta velocidad, como se indica esquemáticamente en la Figura 14a, a medida que se evacúa por difusión el calor generado por la solidificación. Después de cierto tiempo, sin embargo, la superficie de las islas se desestabiliza y empiezan a salir “protuberancias”, o *dendritas*. Esas dendritas evolucionan hacia formas complejas, con ramificaciones secundarias bastante regulares, ilustradas por la Figura 14b. La isla crecida se parece muy poco a una esfera y toma

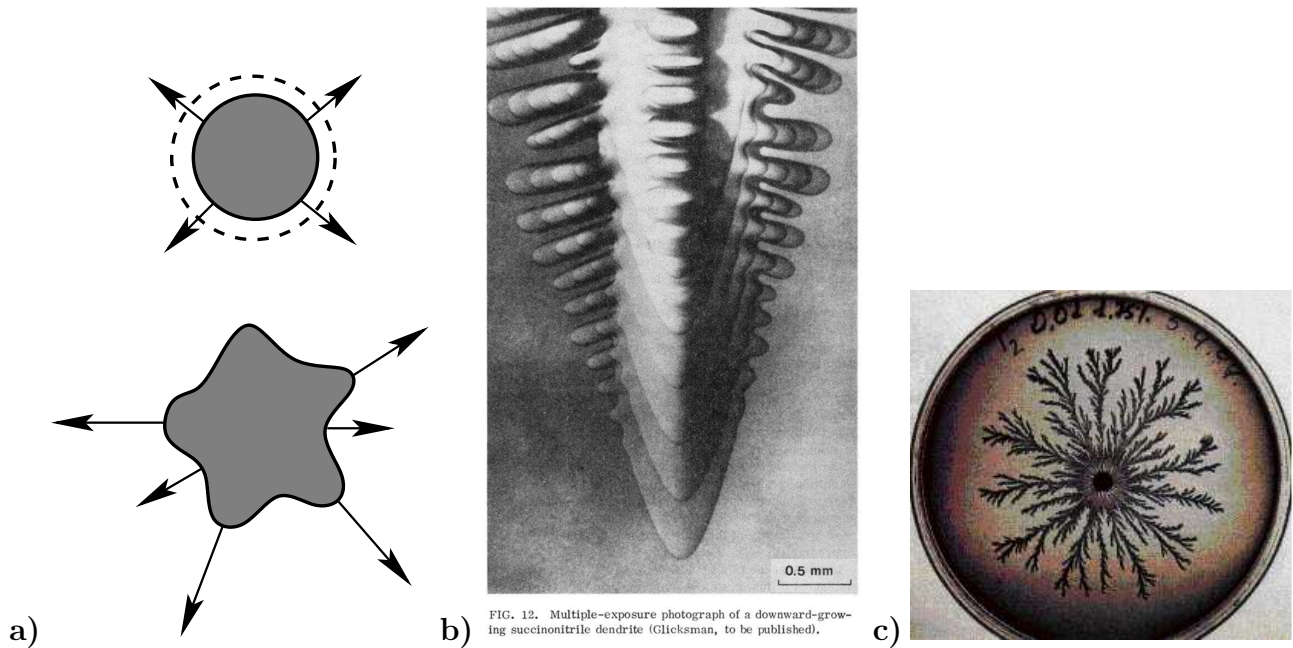


FIG. 12. Multiple-exposure photograph of a downward-growing succinonitrile dendrite (Glicksman, to be published).

Figure 14: Formas de crecimiento. **a)** Desestabilización de una isla sólida creciendo en una fase líquida sobre-enfriada. **b)** Dendrita de solidificación. **c)** Cúmulo fractal de crecimiento (colonia de bacterias).

un aspecto característico de los copos de nieve.

Con argumentos “ingenuos”, podríamos pensar que si el sistema está cerca del equilibrio, la energía libre de una isla debería quedar lo más pequeña posible durante el crecimiento. Esto implica que la isla siempre debería permanecer de forma esférica para minimizar su energía de superficie, de manera análoga a una burbuja de jabón flotando en el aire. La Figura 14b nos convence de que no es el caso. Si su evolución estuviera controlada por un principio de minimización de energía, el sistema elegiría una forma más sencilla!

El origen de las formas dendríticas es *dinámico*. Un frente planar de solidificación es intrínsecamente *inestable* debido a las propiedades del transporte de calor en la zona de la interface. La descripción detallada de la inestabilidad es un poco técnica y no la presentamos aquí. En pocas palabras, las puntas crecen inicialmente más rápido que las partes hundidas (Fig.14a) debido a que evacúan más rápido el calor generado por la solidificación hacia la fase líquida. (Un efecto análogo existe en electrodinámica: el campo eléctrico es mayor cerca de las puntas de un conductor que en los huecos.) Cualquier rugosidad inicial de la superficie se amplifica en el tiempo y da lugar, en el régimen no lineal, a una dendrita.

De alguna manera, el sistema se “pierde” en su espacio de fase durante su camino hacia el equilibrio. Las formas emergentes son sorprendentes por su belleza y los estados de equilibrio no las pueden producir. Si el líquido está sobre-enfriado a temperaturas más bajas aún, puede emerger una forma *estocástica* de crecimiento, ilustrada por la Figura 14c. La regularidad de la Figura 14b se pierde (ver las Figuras 3a y 3b para una situación análoga) y la complejidad morfológica aumenta. El agregado de la Figura 14c tiene una geometría fractal, de dimensión $d_F \simeq 1.66$. Podría bien representar una forma de solidificación, aunque en este caso, se trata de un sistema bien diferente: una colonia de bacterias crecidas con pocos nutrientes! Este ejemplo nos muestra una vez más la *universalidad* de muchos fenómenos fuera de equilibrio. Un modelo

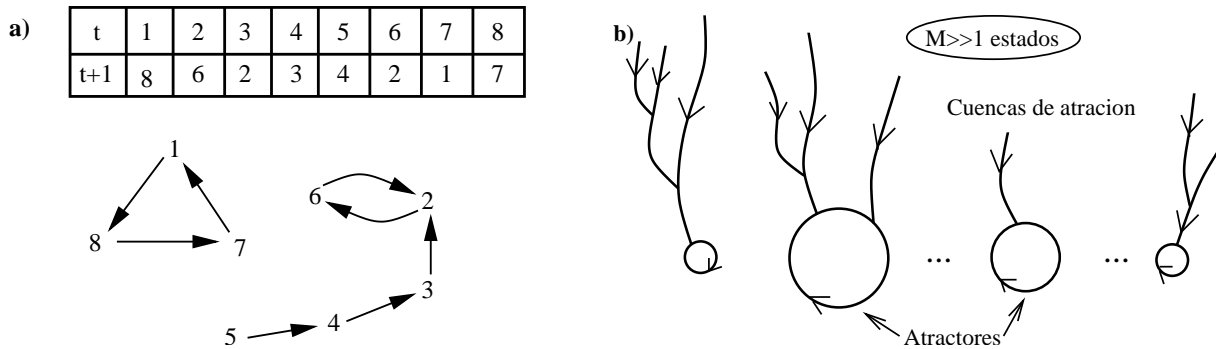


Figure 15: El modelo del mapeo aleatorio. Para cualquier condición inicial, a tiempos largos el sistema visita de manera cíclica unos estados distribuidos en diferentes atractores.

genérico que produce formas fractales de crecimiento es el modelo de Agregación Limitada por la Difusión (Diffusion Limited Aggregation, DLA).

4.2 Sistemas desordenados

Ahora discutimos el segundo aspecto mencionado: el desorden. El desorden juega un papel central en la evolución temporal de sistemas compuestos de un número grande de componentes heterogeneos. Por ejemplo, es el caso de los sistemas biológicos. Consideremos la genética. La macromolécula de ADN se puede dividir en fragmentos o secuencias, que representan los genes (alrededor de 30,000 para el ADN humano). Cada gen es único y cuando se expresa, sintetiza un mensajero que permite cumplir alguna función específica. Además, los genes interactúan: un gen puede activar o inhibir otro. Este sistema es más complicado que prácticamente todos los sistemas que conocen los físicos: por ejemplo, un cristal tiene muchos átomos pero todos estos átomos son idénticos y todos interactúan de la misma manera!

Para simplificar, atribuimos a cada gen una variable binaria (0 o 1). A lo largo de la cadena de ADN de una célula, cada gen, a un tiempo dado, puede ser expresado (estado 1) o no-expresado (estado 0): la actividad del genoma en la célula puede entonces tomar $M \simeq 2^{30,000}$ configuraciones diferentes posibles. Suponiendo que se necesitan unos ms para pasar de una configuración a la otra, el sistema se tardaría un tiempo mayor a la edad del universo en visitar este número astronómico de configuraciones. Por suerte, solamente una fracción ínfima de estados del genoma permite el funcionamiento normal de una célula. Además es vital que aparezcan ciclos (relativamente cortos) de actividad genética, para que los mismos procesos celulares se repitan un gran número de veces. Si no, la vida sería un caos! ¿Cómo la actividad genética se regula o *se ordena*, para limitarse a un número pequeño de estados? ¿Cómo estos estados “útiles” pueden ser visitados periódicamente en el tiempo? ¿Cuál es el papel del desorden en esta regulación?

Consideremos un sistema que puede tomar M configuraciones posibles, con M un entero muy grande. No se trata entonces de estados continuos (como en las secciones anteriores) sino discretos. Supongamos que el tiempo también es discreto y que el sistema “brinca” de un estado al otro a cada unidad de tiempo ($t \rightarrow t + 1$). Además, la dinámica es determinista (una aproximación razonable en genética): cada estado individual tiene un “sucesor” único al siguiente tiempo. Este tipo de sistema es un *autómata*. Su dinámica está definida por las reglas, fijas desde un principio, que indican cómo se pasa de un estado al otro. Una regla muy sencilla

es la de suponer que cada estado tiene como sucesor otro elegido al azar con equi-probabilidad dentro de los M posibles. Este modelo del “mapeo aleatorio” fue propuesto por Derrida y Flyjberg en 1987. Un ejemplo está dado en la tabla de la Figura 15a con $M = 8$. El sistema es estructuralmente “desordenado” debido a la serie de números elegidos de manera aleatoria en la línea $t + 1$. (Se habla también de desorden congelado.) Si ploteamos las trayectorias en el espacio de fase para este ejemplo, vemos que el sistema queda finalmente atrapado en ciclos o atractores (1,8,7,1,... o 6,2,6,...). El atractor alcanzado por el sistema depende de la condición inicial.

Este modelo es analíticamente soluble. Es menos sencillo de lo que parece y tiene propiedades poco triviales en el límite $M \gg 1$. El espacio de fase aparece muy fragmentado, como se indica esquemáticamente en la Figura 15b: todas las trayectorias terminan en atractores cerrados. Por las reglas deterministas, estos ciclos son desconectados entre ellos. El número promedio de atractores, N_a , es grande comparado con 1 pero es mucho más pequeño que el número total de estados M . N_a crece muy lentamente con M : $N_a \simeq \frac{1}{2} \ln M$. El período de un ciclo (el número de estados que contiene) es una cantidad aleatoria que fluctúa mucho, no hay un valor típico sino dos: los ciclos se dividen principalmente entre muy cortos y muy largos. El período promedio sobre todos los atractores, $\langle T \rangle$, escala como $\langle T \rangle \sim \sqrt{M}$, un número mucho más chico que M pero todavía astronómico para aplicaciones a la regulación genética. Estos atractores comparten muchas propiedades comunes con los mínimos locales de energía en los vidrios de espin, un tipo de sistema desordenado muy estudiado en física estadística y materia condensada.

El modelo muestra que un desorden estructural (en las reglas) no impide un cierto orden en los resultados: el número chico de atractores implica que la parte del espacio de fase accesible a tiempos largos es una fracción muy pequeña del total. Sin embargo, el período de los ciclos es demasiado largo. Ciclos mucho más cortos, compatibles con los órdenes de magnitud de la regulación genética, se pueden conseguir con una versión más complicada del modelo, que toma en cuenta interacciones más realistas entre genes. Se trata del modelo NK . Introduce una red aleatoria de interacción entre genes (no necesariamente entre primeros vecinos a lo largo de la cadena) y unas reglas dinámicas de tipo autómatas, en forma de matrices booleanas aleatorias. De hecho, aquel modelo, propuesto por Kauffman en 1969, es muy anterior al modelo del mapeo aleatorio! El modelo NK ha permitido un acercamiento nuevo a los fenómenos de expresión genética y de diferenciación celular. Un resultado es que, en cierta región de los parámetros, el número de atractores es muy chico: $N_a \sim (\ln M)^{1/2}$. En otras palabras, N_a es proporcional a la raíz cuadrada del número de genes, $N_a \sim 170$ para el ADN humano. Este número es cercano al número de tipos diferentes de células en el organismo. El período promedio de un ciclo es también muy corto, $\langle T \rangle \sim (\ln M)^{1/2}$.

5 Bibliografía

Un curso detallado de introducción a los sistemas dinámicos y al caos; el nivel es de licenciatura-maestría:

[1] “Nonlinear dynamics and Chaos”, S.H. Strogatz, Westview, Cambridge (MA), 1994.

Para una introducción más rápida a los fenómenos no lineales con muchos ejemplos: oscilaciones, patrones, ondas no lineales, solitones, caos:

[2] “Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists”, H.D.I. Abarbanel, M.I. Rabi-

novich, M.M. Sushchik, World Scientific Lecture Notes in Physics, vol. 53, World Scientific, Singapore, 1993.

Serie de notas de cursos introductorios por especialistas reconocidos en varias áreas de los sistemas complejos (caos, patrones, vidrios de espin, autómatas, econofísica...):

[3] “Lectures in the Sciences of Complexity”, D.L. Stein (Ed.), Santa Fe Institute studies in the sciences of complexity, Addison-Wesley, 1989.

Un libro en español presentando a un nivel básico una amplia gama de problemas de la física no lineal, física estadística y sistemas complejos en general:

[4] “Orden y caos en sistemas complejos”, R.V. Solé, S.C. Manrubia, Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1996.

Artículo breve de introducción a los fenómenos fuera de equilibrio y patrones:

[5] “Pattern formation in non-equilibrium physics”, J.P. Gollub and J.S. Langer, Review of Modern Physics **71**, S396 (1999).

Artículo de revisión amplio que describe muchos fenómenos de formación de patrones:

[6] “Pattern formation outside of equilibrium”, M.C. Cross and P.C. Hohenberg, Review of Modern Physics **65**, 851 (1993).

Libro de introducción a la formación de patrones que inspiró varias partes de este curso:

[7] “The dynamics of patterns”, M.I. Rabinovich, A.B. Ezersky, P.D. Weidman, World Scientific, Singapore, 2000.

Libro avanzado sobre formación de patrones, en particular Rayleigh-Bénard, métodos de análisis débilmente no lineal, caos (un clásico):

[8] “Dissipative structures and weak turbulence”, P. Manneville, Academic Press, Boston, 1990.

Un libro similar más enfocado hacia problemas de reacción-difusión:

[9] “Spatio-temporal pattern formation”, D. Walgraef, Springer, New York, 1997.

Un clásico de las aplicaciones de la dinámica no lineal a los sistemas biológicos:

[10] “Mathematical Biology” (3rd edition, vols. I and II), J.D. Murray, Springer, Berlin, 2002-2003.

La teoría de los sistemas dinámicos, autómatas y sistemas desordenados aplicada a la regulación genética y la expresión celular:

[11] “The Origin of Order”, S.A. Kauffman, Oxford University Press, Oxford, 1993.

Libro avanzado, dedicado a las formas de crecimiento y a otros fenómenos no lineales y cooperativos en sólidos:

[12] “Solids far from equilibrium”, C. Godrèche (Ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 1992.